弾性地盤上の矩形平板の面外自由振動のエネルギ解析 －平板の周面が隔壁型単純支持された場合－

名木野 晴暢[1]・田川 達也[2]・稲田 真大[3]・清成 康平[4]・足立 忠晴[5]

[1]都市・環境工学科，[2]東京大学 工学部社会基盤学科，[3]大阪大学 工学部地球総合工学科，
[4]株式会社 大林組，[5]豊橋技術科学大学 機械工学系

本稿は，三次元弾性論に基づくエネルギ解析により弾性地盤上の矩形平板の自由振動性状を考察したものである．矩形平板は線形弾性論で理想化し，剛基盤上にある弾性地盤は線形のWinkler基礎でモデル化した．また，平板の周面は隔壁型単純支持されているとした．弾性地盤－平板系の自由振動の弾性ひずみエネルギと運動エネルギは文献7)で導出した厳密解を用いて解析的に求めた．設計変数に対する弾性地盤－平板系の面外自由振動の全弾性ひずみエネルギと全運動エネルギにおける個々のエネルギ成分の寄与率の変化を理論的に解析し，弾性地盤上の矩形平板の自由振動性状の理解を手助けする基礎資料を提示した．

キーワード: 矩形平板，弾性地盤，面外自由振動，エネルギ解析，三次元弾性論

1．はじめに

構造物の動的設計の合理化および高精度化を実現するためには，その動的挙動を精度よく求めて理解することが重要になる．連続体の自由度は無限大であるため，無限個の正規モード（運動方程式に固有円振動数の調和振動を仮定したときに求められる固有円振動数に対応する固有振動モードのこと）を持つ．構造物の動的応答は，正規座標と正規モードの積の無限和，すなわち重ね合わせにより表される．したがって，構造物の自由振動特性である固有円振動数とこれに対応する固有振動モードは，共振周波数の推定のみならず，構造物の動的挙動を理解するための重要な基礎資料である．

弾性地盤上の平板の非減衰自由振動問題の三次元弾性解析は，これまでに理論的手法または数値解析的手法を用いて研究されている[1)－8)]．弾性地盤－平板系の非減衰自由振動性状は，主に設計変数（板厚や地盤反力係数など）に対する固有円振動数の変化により評価される．その一例を**図-1**に示す．**図-1**の記号の定義は，文献8)を参照されたい．同図は，無次元地盤反力係数k_1a/Eに対する無次元振動数Ω_{111}の数値的変動，および感度の高い領域に関する情報を提供してくれている．後者の範囲は板厚比h/aに依存しているが，同図からこの原因を定量的に推定することは難しい．また，板厚比h/aが大きくなると，無次元振動数Ω_{111}は増加する．この原因の一つとして面外せん断変形の影響が考えられる．しかし，定性的な考察に留まることが多い．この

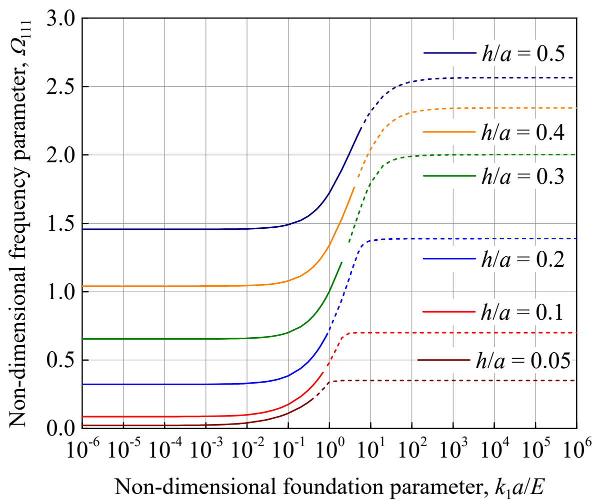


図-1　線形弾性地盤上にある正方形弾性平板の無次元振動数Ω_{111}に与える無次元地盤反力係数 k_1a/E と板厚比 h/a の影響（文献 8)より転載）

ように，設計変数に対する固有円振動数の変動曲線は耐震設計における基礎資料を提供してくれているが，系の自由振動性状の一部を把握したに過ぎない．

de Souza・Croll[9)]は，等方性球殻の固有振動モードの全ひずみエネルギに与える膜エネルギ成分と曲げひずみエネルギ成分の寄与を調べ，殻の自由振動性状を詳しく分析した．また，芳村ら[10)]は，逆対称アングル・プライ積層板の自由振動の全ひずみエネルギにおけるカップリング剛性

に寄与するエネルギ成分の変化から，自由振動性状に与えるカップリング剛性の影響を定量的に明らかにしている．文献9)および文献10)は，対象としている連続体の自由振動の全ひずみエネルギに対する個々のエネルギ成分の寄与率を分析することを“エネルギ解析”と呼んでいる．エネルギ解析の利点は，(1) 対象としている連続体の自由振動性状の理解に役立つこと[10]，および (2) 構造物の動的設計における剛性変更の判断資料としても役立つこと[9]であり，固有振動数とこれに対応する固有振動モードから求めることができるひずみエネルギの情報は，実用上重要であると考えられる．名木野ら[11]は，三次元弾性論に基づくエネルギ解析により任意の支持条件を有する矩形平板の自由振動性状の定量的な評価を行っており，設計変数に対するエネルギ量の変化の情報は二次元近似理論（平板理論）の適用範囲の検討にも役立つ可能性を指摘している．

本稿では，文献8)で示された弾性地盤－平板系の自由振動性状の理解を手助けする基礎資料の提供を目的として，設計変数に対する弾性地盤－平板系の面外自由振動の全弾性ひずみエネルギと全運動エネルギにおける個々のエネルギ成分の寄与率の変化を三次元弾性論に基づいて理論的に解析した．なお，本稿は，第二著者，第三著者および第四著者が本校に在籍していたときの研究成果の一部を第一著者と第五著者が取りまとめたものである．

２．数理モデル

本稿では，**図-2**に示すような弾性地盤の上にある周面隔壁型単純支持された矩形平板の非減衰自由振動問題を考える．ここで，a, b, hは，それぞれ平板の長さ，幅，厚さであり，k_1は弾性地盤の地盤反力係数である．平板の中央面を通るように直交直線座標系O-xyzを設定し，x, y, z軸方向の時間依存性の変位成分を，それぞれ$u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ とする．

平板は，内部領域$V = (0, a) \times (0, b) \times (-h/2, h/2)$ と6つの境界面$\partial V_i\,(i = 1, 2, \ldots, 6)$ からなる．ここで，$(x = 0)$ の境界面を∂V_1，$(x = a)$ の境界面を∂V_2，$(y = 0)$ の境界面を∂V_3，$(y = b)$ の境界面を∂V_4，$(z = -h/2)$ の境界面を∂V_5，$(z = h/2)$ の境界面を∂V_6と定義する．なお，時間領域は $t \in (0, \infty)$ であり，$(t = 0)$ は初期条件により与えられる．

(1) 仮　　定

平板は，線形の三次元弾性論に従って固有円振動数ωで調和振動するものとする．また，材料の機械的性質である縦弾性係数とポアソン比をそれぞれEとν，物理的性質である密度をρで表し，これらは均質であるとする．

弾性地盤は剛基盤上にあるとし，その振る舞いはWinkler型の線形弾性基礎でモデル化する．ただし，弾性地盤の質量の影響は考慮しない．

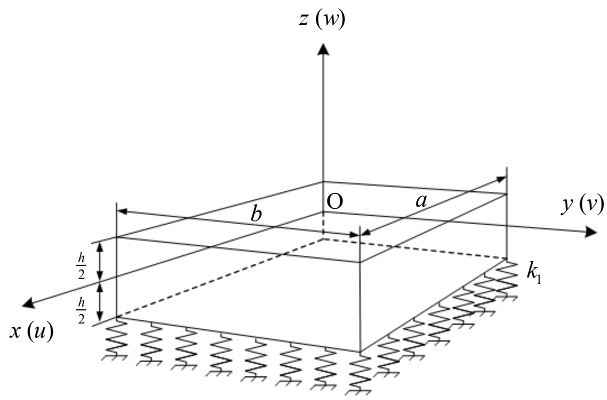


図-2　弾性地盤上の矩形平板と座標系

(2) 強形式

固有円振動数ωで自由振動する弾性地盤上の弾性平板の変位成分u, v, wは，それぞれ次式のように表される．

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)e^{j\omega t},\ v(x,y,z,t) = V(x,y,z)e^{j\omega t},\ w(x,y,z,t) = W(x,y,z)e^{j\omega t} \tag{1}$$

ここで，$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ は，それぞれx, y, z軸方向の変位振幅であり，jは虚数単位である．

内部領域Vの各点で満足する変位振幅U, V, Wに関する支配方程式は，次のように表される[8]．

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 U + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e_v}{\partial x} + \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 U = 0 \\ \nabla^2 V + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e_v}{\partial y} + \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 V = 0 \\ \nabla^2 W + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e_v}{\partial z} + \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 W = 0 \end{aligned}\right\} \text{ in } V \tag{2}$$

ただし，

$$e_v = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \tag{3}$$

であり，

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{4}$$

は無限弾性体内を伝わる弾性波の横波の伝播速度，μは剛性率であり，(ω/c_2) は波数である．式(2)は周波数領域のスカラー波動方程式（Helmholtz方程式）に相当する．ただし，左辺の第二項は変位振幅U, V, Wの連成を表す項である．

解析モデルに対応する境界条件式は，次のように表される[8]．

$$V = W = 0\,,\ \sigma_{xx} = 0 \quad \text{on} \ \partial V_1 \ \text{and} \ \partial V_2 \tag{5}$$

$$U = W = 0\,,\ \sigma_{yy} = 0 \ \text{ on } \ \partial V_3 \ \text{ and } \ \partial V_4 \tag{6}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0\,,\ \sigma_{zz} = k_1 W \ \text{ on } \ \partial V_5 \tag{7}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0 \ \text{ on } \ \partial V_6 \tag{8}$$

ここで，$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\ (i, j = x, y, z)$ は時間依存性を排除した応力テンソルの成分であり，第一添字は応力の作用する面，第二添字は作用する方向を意味する．

以上が本稿の解くべき振動固有値問題の概要である．その詳細は，文献7)および文献8)を参照されたい．

３．エネルギ解析

文献 8)の無次元量に従うとき，弾性地盤－平板系の弾性ひずみエネルギ U と運動エネルギ T は，それぞれ式(9)および式(10)のように表される．

$$\begin{aligned} U &= (e^{\mathrm{j}\omega t})^2 abhE\left\{\int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2E}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}\right. \\ &\quad + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx}\varepsilon_{zx} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy})\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \\ &\quad \left. + \int_0^1\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{k_1 h}{E}\right)(W\big|_{\zeta=-\frac{1}{2}})^2\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\right\} \\ &= (e^{\mathrm{j}\omega t})^2 abhE U_{\max} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} T &= (\mathrm{j}\omega_{mnl} e^{\mathrm{j}\omega t})^2 (abh^3)\int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{\rho}{2}(U^2 + V^2 \\ &\quad + W^2)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \\ &= (e^{\mathrm{j}\omega t})^2\{\rho(\mathrm{j}\omega_{mnl})^2 abh^3\} T_{\max} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$U_{\max}$ と $T_{\max}$ は，それぞれ，弾性地盤－平板系が非減衰自由振動をするときの弾性ひずみエネルギの最大値および運動エネルギの最大値である．また，σ_{ii} と ε_{ii} $(i = x, y, z)$ は，それぞれ i 軸方向の垂直応力と微小垂直ひずみであり，σ_{ij} と ε_{ij} $(i \neq j)$ は，それぞれ ij 面のせん断応力と微小せん断ひずみである．

さて，弾性地盤－平板系の弾性ひずみエネルギの最大値 $U_{\max}$ を構成する各成分を

$$\left.\begin{aligned} U_{ii} &= \int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2E}(\sigma_{ii}\varepsilon_{ii})\,\mathrm{d}\varsigma\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \ \ (i = x, y, z) \\ U_{ij} &= \int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2E}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,\mathrm{d}\varsigma\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \ \ (i \neq j) \\ U_{\mathrm{Winkler}} &= \int_0^1\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{k_1 h}{E}\right)(W\big|_{\zeta=-\frac{1}{2}})^2\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

と定義すると，$U_{\max}$ は，次式のように表すことができる．

$$U_{\max} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{yz} + U_{zx} + U_{xy} + U_{\mathrm{Winkler}} \tag{12}$$

例えば，矩形平板の最低次の面外曲げの自由振動を対象とするとき，U_{xx}, U_{yy}, U_{xy} は面外曲げ変形により平板の内部に蓄積される弾性ひずみエネルギを表している．U_{zz} は面外伸縮変形，すなわち板厚の伸縮変形により平板の内部に蓄積される弾性ひずみエネルギを表し，U_{yz}, U_{zx} は面外せん断変形により平板の内部に蓄積される弾性ひずみエネルギを意味している．また，U_{Winkler} は矩形平板が面外曲げ自由振動するときに，弾性地盤（Winkler 基礎）に蓄えられる弾性エネルギである．U_{Winkler} を除くエネルギの値は，矩形平板の最低次の面外曲げ自由振動するときの変形成分の割合を表す定量的な指標の一つと考えることができる [11]．

同様に，運動エネルギの最大値 $T_{\max}$ を構成する各成分を

$$\left.\begin{aligned} T_{UU} &= \int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}U^2\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \\ T_{VV} &= \int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}V^2\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \\ T_{WW} &= \int_0^1\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}W^2\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

と定義すると，$T_{\max}$ は，次式のようにも表される．

$$T_{\max} = T_{UU} + T_{VV} + T_{WW} \tag{14}$$

先と同じように矩形平板の最低次の面外曲げ自由振動を対象とするとき，T_{UU}, T_{VV} は面内変位による矩形平板の運動エネルギを表しており，T_{WW} は面外変位によるそれを意味している．これらのエネルギの値は，矩形平板の最低次の面外曲げ自由振動するときの面内慣性と面外慣性の割合を表す定量的な指標の一つと考えてよかろう [11]．

よって，弾性地盤－平板系の固有円振動数ωとこれに対応する固有振動モードU, V, Wが既知であれば，式(11)からは弾性地盤－平板系の弾性ひずみエネルギの最大値$U_{\max}$を構成する各成分を，式(13)からは運動エネルギの最大値$T_{\max}$の各成分を求めることができる．また，求めたエネルギ成分と設計変数の関係を解析することで，弾性地盤－平板系の自由振動性状を調べることができる．

なお，弾性地盤－平板系が非減衰自由振動するときの弾性ひずみエネルギの最大値$U_{\max}$と運動エネルギの最大値$T_{\max}$には，次の関係が成り立つ．

$$abhEU_{\max} = \rho\omega_{mnl}^2 abh^3 T_{\max} \tag{15}$$

よって，$U_{\max}$, $T_{\max}$と固有円振動数ωの間には，

$$U_{\max} = \left(\omega_{mnl} h\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)^2 T_{\max} \tag{16}$$

が成立する．すなわち，系の弾性ひずみエネルギの最大値$U_{\max}$は，板厚h, 平板のヤング率Eと密度ρで無次元化した固有円振動数の二乗と運動エネルギの最大値$T_{\max}$との積に等しい．式(16)は，コード検証に活用することができる．

さて，式(11)または式(13)に従って各エネルギを求めるためには，**第2章**で示した解くべき振動固有値問題を解いて，

固有円振動数ω_{mnl}とこれに対応する固有振動モードU, V, Wを求めておかなければならない．本稿では，著者らが文献7)で導出した厳密解を用いた．また，各エネルギを求めるための積分は，全て解析的に行った．

４．理論解析および考察

ここでは，地盤反力係数に対する弾性地盤－平板系の自由振動の弾性ひずみエネルギと運動エネルギの変化を理論解析により調べる．

(1) 理論解析に用いるパラメータ

本論文では，コンクリートからなる正方形状の弾性平板（$b/a = 1$）を想定し，ポアソン比は$\nu = 0.2$に設定した[12]．

弾性地盤上の平板の問題では，地盤反力係数k_1の設定が極めて重要になる．理論解析においては，k_1を任意に設定できるが，構造工学において意味を持つ範囲を念頭に置いて設定しなければならない．文献12)によれば，実在する弾性地盤を対象としたとき，次式のように無次元化された地盤反力係数（以下，無次元地盤反力係数と呼ぶ）は，

$$\frac{k_1 a}{E} \in [10^{-4},\, 10^{-2}] \tag{17}$$

の範囲を取るようである．理論解析の際には，この範囲を含むように無次元地盤反力係数k_1a/Eを設定した．

理論解析の対象とする自由振動は，正方形平板の最低次の面外曲げの自由振動である$m = n = 1$とし，三次元弾性論に基づかなければ正確に調べることができないz軸方向の振動次数lは1, 2, 3とした．ただし，m, nは，それぞれx, y軸方向の固有関数の半波数の数[8]である．参考までに，$m = n = l = 1$の自由振動は，耐震設計の際に必要となる基本曲げの自由振動である．なお，無次元振動数は，

$$\Omega_{mnl} = \frac{\omega_{mnl} h}{c_2} \tag{18}$$

と定義している[8]．

(2) 規格化された弾性ひずみエネルギと運動エネルギ

エネルギ解析では，弾性地盤上にある正方形平板の面外自由振動の弾性ひずみエネルギの最大値$U_{\max}$と運動エネルギの最大値$T_{\max}$で規格化した次式のエネルギ量を指標とした．

$$T_{\mathrm{i}} = (T_{UU} + T_{VV})T_{\max}^{-1}\,,\;\; T_{\mathrm{t}} = T_{WW}T_{\max}^{-1} \tag{19}$$

$$U_{\mathrm{b}} = (U_{xx} + U_{yy})U_{\max}^{-1}\,,\;\; U_{\mathrm{t}} = U_{xy}U_{\max}^{-1}\,,$$

$$U_{\mathrm{s}} = (U_{yz} + U_{zx})U_{\max}^{-1}\,,\;\; U_{\mathrm{z}} = U_{zz}U_{\max}^{-1} \tag{20}$$

$$U_{\mathrm{W}} = U_{\mathrm{Winkler}}U_{\max}^{-1} \tag{21}$$

ここで，T_{i}とT_{t}は，それぞれ全運動エネルギ$T_{\max}$に対する面内慣性と面外慣性によるエネルギの割合を表す指標である．同様に，U_{b}, U_{t}, U_{s}, U_z, U_{W}は，それぞれ全弾性ひずみエネルギ$U_{\max}$に対する曲げ変形または面内伸縮変形，面内せん断変形，面外せん断変形，面外伸縮変形によるエネルギの割合，弾性地盤に蓄えられる弾性エネルギの割合を意味する．無次元地盤反力係数k_1a/Eに対するこれらの規格化されたエネルギ量の変化を調べることで，弾性地盤－平板系の自由振動性状の変形成分の割合を知ることができる．

(3) Verification

本稿では，文献7)と文献8)の理論解析に用いた4倍精度計算のfortranコードを修正することで，各エネルギ量を求めた．その為，理論解析を実施する前にmodeling and simulationにおけるV＆V (ASME V＆V 10-2006)[13]に倣って，“各エネルギ量を正しく計算できているか”を検証しておく必要がある[14]．ここでは，本稿で示した各エネルギ量（Present）のコード検証について述べる．検証に用いる参照解の解析条件に合わせる目的でポアソン比は$\nu = 0.3$に設定した．また，固有円振動数ω_{mnl}は，

$$n_{mnl}^{*} = \frac{\omega_{mnl} a}{c_0}\,,\;\; c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{22}$$

のように無次元化した．ここで，c_0は一様な弾性棒の縦波の伝播速度である．

弾性地盤－平板系の無次元振動数n^*_{111}とこれに対応する自由振動の運動エネルギ成分$T_{UU}/T_{\max}$, $T_{VV}/T_{\max}$, $T_{WW}/T_{\max}$の検証を**表-1**に示す．板厚比h/aは0.001（極薄板），0.01（薄板），0.2（中等厚板）および0.5（厚板）とし，無次元地盤反力係数k_1a/Eは0（平板の下面は自由表面）と式(17)の上限値である10^{-2}に設定した．検証のための参照解として，名木野ら[11]の三次元弾性論に基づくB-spline Ritz解析（BSRA）と有限要素解析（FEA）による数値解も併記した．ここで，FEAには汎用有限要素コードAbaqus 6.11を用いた．同表のSR4, C3D8およびC3D20は，それぞれ4節点一次低減積分シェル要素，8節点一次ソリッド要素，および20節点二次ソリッド要素を意味する[15]．FEAの離散化は，要素が正方形または立方体を保つように分割した．よって，M_x, M_y, M_zをそれぞれx, y, z軸方向の要素分割数とすると，h/a = 0.01の要素分割数は$M_x \times M_y = 200 \times 200$（自由度数は121,203），$h/a = 0.2$のそれは$M_x \times M_y \times M_z = 40 \times 40 \times 8$（C3D8の自由度数は45,387，C3D20の自由度数は174,291）であり，$h/a = 0.5$のそれは$M_x \times M_y \times M_z = 32 \times 32 \times 16$（C3D8の自由度数は55,539，C3D20の自由度数は215,523）である．他方，BSRAの離散化条件は，spline次数$p_x \times p_y \times p_z = 4 \times 4 \times 2$, knotの数$m_x \times m_y \times m_z = 13 \times 13 \times 5$（自由度数は4,608）である．なお，本稿（Present）およびFEAの結果は，有効数字5桁で整理した．

表-1　弾性地盤－平板系の無次元振動数n^*_{111}とこれに対応する自由振動の運動エネルギ成分の検証

h/a	k_1a/E	Methods	n^*_{111}	T_{UU}/T_{max}	T_{VV}/T_{max}	T_{WW}/T_{max}
0.001	0	Present	5.9733×10^{-3}	8.2246×10^{-7}	8.2246×10^{-7}	1.0000
		BSRA[11]	5.973×10^{-3}	-	-	1.000
0.01	0	Present	5.9713×10^{-2}	8.2143×10^{-5}	8.2143×10^{-5}	9.9984×10^{-1}
		BSRA[11]	5.971×10^{-2}	-	-	1.000
		FEA (S4R)	5.9713×10^{-2}	-	-	-
	10^{-6}	Present	6.0544×10^{-2}	8.2143×10^{-5}	8.2143×10^{-5}	9.9984×10^{-1}
	10^{-4}	Present	1.1646×10^{-1}	8.2143×10^{-5}	8.2143×10^{-5}	9.9984×10^{-1}
	10^{-2}	Present	1.0016	8.2255×10^{-5}	8.2255×10^{-5}	9.9984×10^{-1}
		FEA (S4R)	1.0017	-	-	-
0.2	0	Present	1.0607	2.1533×10^{-2}	2.1533×10^{-2}	9.5693×10^{-1}
		FEA (C3D8)	1.0577	-	-	-
		FEA (C3D20)	1.0607	-	-	-
	10^{-6}	Present	1.0607	2.1533×10^{-2}	2.1533×10^{-2}	9.5693×10^{-1}
	10^{-4}	Present	1.0609	2.1534×10^{-2}	2.1534×10^{-2}	9.5693×10^{-1}
	10^{-2}	Present	1.0820	2.1560×10^{-2}	2.1560×10^{-2}	9.5688×10^{-1}
		FEA (C3D8)	1.0790	-	-	-
		FEA (C3D20)	1.0820	-	-	-
0.5	0	Present	1.8801	4.0189×10^{-2}	4.0189×10^{-2}	9.1962×10^{-1}
		FEA (C3D8)	1.8777	-	-	-
		FEA (C3D20)	1.8801	-	-	-
	10^{-6}	Present	1.8801	4.0189×10^{-2}	4.0189×10^{-2}	9.1962×10^{-1}
	10^{-4}	Present	1.8801	4.0190×10^{-2}	4.0190×10^{-2}	9.1962×10^{-1}
	10^{-2}	Present	1.8843	4.0267×10^{-2}	4.0267×10^{-2}	9.1947×10^{-1}
		FEA (C3D8)	1.8819	-	-	-
		FEA (C3D20)	1.8843	-	-	-

同表より，h/aおよびk_1a/Eに係わらず，BSRAおよびFEAによる近似解は，本稿で示した弾性地盤－平板系のn^*_{111}とT_{WW}/T_{max}によく一致している．また，三つの運動エネルギ成分は,

$$(T_{UU} + T_{VV} + T_{WW})T_{\max}^{-1} \cong 1$$

を少なくとも有効数字5桁で満足している．これらのことから，本稿で示した弾性地盤－平板系のn^*_{111}とこれに対応する自由振動の運動エネルギ成分T_{UU}/T_{max}, T_{VV}/T_{max}, T_{WW}/T_{max}は妥当な結果を与えていることが確認できる．ここで，本稿の厳密解を正解としてFEAとBSRAの数値解の近似精度を確認してみると，C3D20によるFEAは有効数字5桁で厳密解に一致する高い精度を有していることがわかる. ただし, その自由度数は約21万とかなり大きい. 他方, BSRAはFEAよりもかなり少ない自由度数で，精度の高い近似解を提供していることも確認できる.

表-2は，弾性地盤－平板系の無次元振動数n^*_{111}とこれに対応する自由振動の弾性ひずみエネルギ成分U_{xx}/U_{max}, U_{xy}/U_{max}, U_{yz}/U_{max}, U_{zz}/U_{max}, $U_{Winkler}/U_{max}$を対象として，**表-1**と同様の検証を行ったものである. ただし, 正方形平板（b/a = 1）であるので，U_{xx}/U_{max} = U_{yy}/U_{max}およびU_{yz}/U_{max} = U_{zx}/U_{max}である. **表-2**より, k_1a/Eに対する各弾性ひずみエネルギ成分の変動，および

$$(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{yz} + U_{zx} + U_{xy} + U_{\mathrm{Winkler}})U_{\max}^{-1} \cong 1$$

を満足していることからも解くべき問題の弾性ひずみエネルギを正しく求められていると考えてよかろう.

以上より，著者らが独自に作成したfortranコードは“各エネルギ量を正しく計算できている”と判断できる.

(4)　自由振動する平板の弾性ひずみエネルギと運動エネルギに与える地盤反力係数の影響

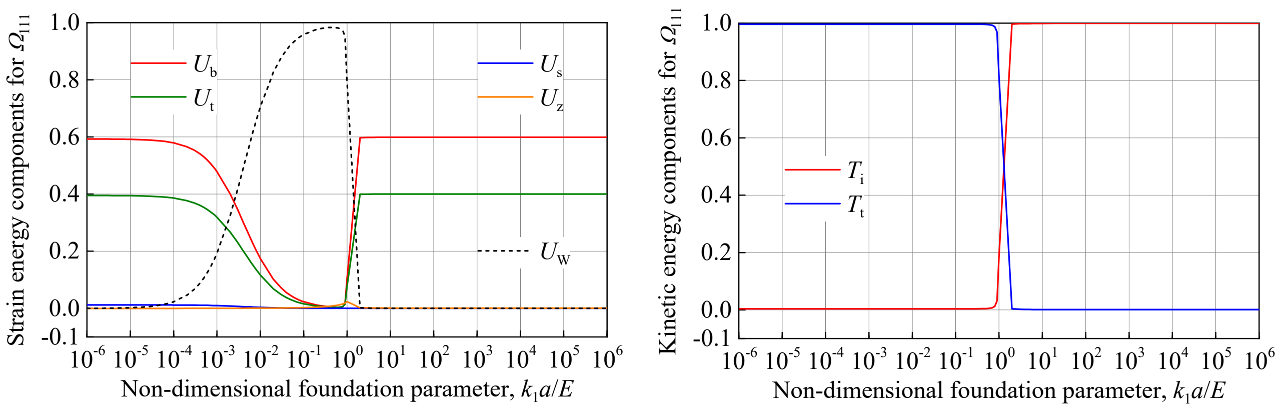
a）薄板

図-3は，無次元地盤反力係数k_1a/Eを10^{-6}から10^6まで変化

表-2　弾性地盤－平板系の無次元振動数n^*_{111}に対応する自由振動の弾性ひずみエネルギ成分の検証

h/a	k_1a/E	Methods	U_{xx}/U_{max}	U_{xy}/U_{max}	U_{yz}/U_{max}	U_{zz}/U_{max}	$U_{Winkler}/U_{max}$
0.001	0	Present	3.5000×10^{-1}	3.5000×10^{-1}	2.8199×10^{-6}	-1.4099×10^{-7}	0
		BSRA[11)]	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	-	-	-
0.01	0	Present	3.2482×10^{-1}	3.4980×10^{-1}	2.8174×10^{-4}	-1.4086×10^{-5}	0
		BSRA[11)]	3.248×10^{-1}	3.498×10^{-1}	-	-	-
	10^{-6}	Present	3.1596×10^{-1}	3.4026×10^{-1}	2.7406×10^{-4}	-1.1780×10^{-5}	2.7273×10^{-2}
	10^{-4}	Present	8.5370×10^{-2}	9.1963×10^{-2}	7.3973×10^{-5}	4.8445×10^{-5}	7.3710×10^{-1}
	10^{-2}	Present	1.1187×10^{-3}	1.2449×10^{-3}	8.7385×10^{-7}	9.9201×10^{-5}	9.9642×10^{-1}
0.2	0	Present	2.7197×10^{-1}	2.9060×10^{-1}	8.4788×10^{-2}	-4.1193×10^{-3}	0
	10^{-6}	Present	2.7197×10^{-1}	2.9048×10^{-1}	8.4788×10^{-2}	-4.1192×10^{-3}	4.0606×10^{-6}
	10^{-4}	Present	2.7186×10^{-1}	2.7961×10^{-1}	8.4749×10^{-2}	-4.1083×10^{-3}	4.0589×10^{-4}
	10^{-2}	Present	2.6121×10^{-1}	2.7961×10^{-1}	8.1019×10^{-2}	-3.0352×10^{-3}	3.8973×10^{-2}
0.5	0	Present	1.6644×10^{-1}	1.7264×10^{-1}	2.5227×10^{-1}	-1.0043×10^{-2}	0
	10^{-6}	Present	1.6644×10^{-1}	1.7264×10^{-1}	2.5227×10^{-1}	-1.0043×10^{-2}	4.4858×10^{-7}
	10^{-4}	Present	1.6643×10^{-1}	1.7264×10^{-1}	2.5225×10^{-1}	-1.0040×10^{-2}	4.4854×10^{-5}
	10^{-2}	Present	1.6580×10^{-1}	1.7220×10^{-1}	2.5072×10^{-1}	-9.6980×10^{-3}	4.4502×10^{-3}

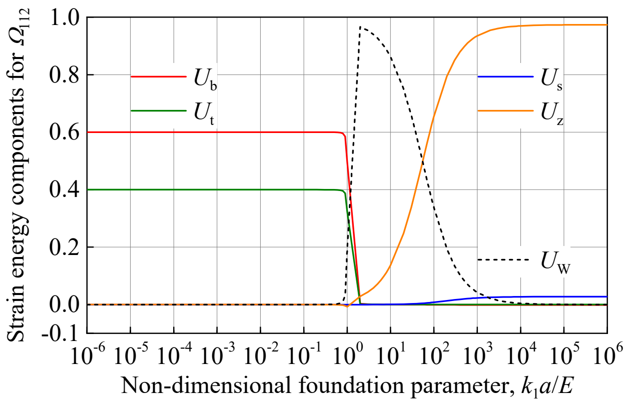
Note: $U_{xx}/U_{max} = U_{yy}/U_{max}$ and $U_{yz}/U_{max} = U_{zx}/U_{max}$



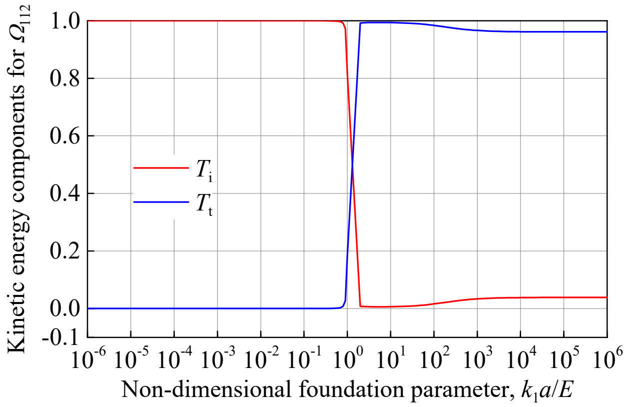
(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

図-3　薄板の基本振動Ω_{111}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.05$, $b/a = 1$

させたときの板厚比$h/a = 0.05$の正方形薄板の基本振動Ω_{111}の規格化された各エネルギ成分の変動を表したものである．ここで，(a)は弾性ひずみエネルギであり，(b)は運動エネルギである．まず，同図(b)より，運動エネルギ成分T_i, T_tは$10^{-1} < k_1a/E < 10^1$の範囲で急激に変化する．$k_1a/E < 10^0$の範囲では$T_i \approx 0$, $T_t \approx 1$を取るが，$k_1a/E > 10^0$の範囲では$T_i \approx 1$, $T_t \approx 0$にスイッチする．これは，運動エネルギ成分T_i, T_tの変化率が大きい範囲で固有振動モードが変化したことを表している[8)]．また，文献7)から判断すると，スイッチ前は面外曲げの固有振動モード（flexural mode）[7)]であるが，スイッチ後は厚さ方向に伸縮する固有振動モード（breathing mode）[7)]になる．このとき，前者の振動状態はT_tが支配的で，後者のそれはT_iが支配的な傾向にある．更に，同図(b)は面内変位と面外変位が非連成である情報も提供してくれている．次に同図(a)より，k_1a/Eが10^{-6}から10^0まで変化するとき，U_b, U_t, U_sは減少し，U_Wは増加する．ただし，U_sの値は極めて小さく，U_zはほぼ零である．これは，薄板がΩ_{111}で自由振動するときの変形に面外せん断変形および面外伸縮変形がほとんど生じないことを表している．また，$10^{-2} \leq k_1a/E < 10^1$の範囲では，($U_b + U_t < U_W$)となっており，固有振動モードが変化している$k_1a/E$の範囲では$U_b$, U_tもほぼ零となっている．更に，k_1a/Eに対するU_Wの変動は，平板の自由振動に与える弾性地盤の影響を表しており，$k_1a/E < 10^0$の範囲は弾性地盤が存在しても$U_W \approx 0$であれば平板の自由振動に与える弾性地盤の影響は殆どなく，構造動力学的には下面が自由表面（$\sigma_{zz} = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ on ∂V_5）である

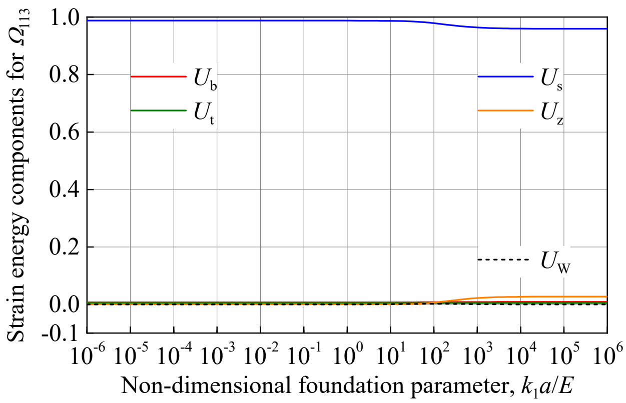


(a) 弾性ひずみエネルギ成分

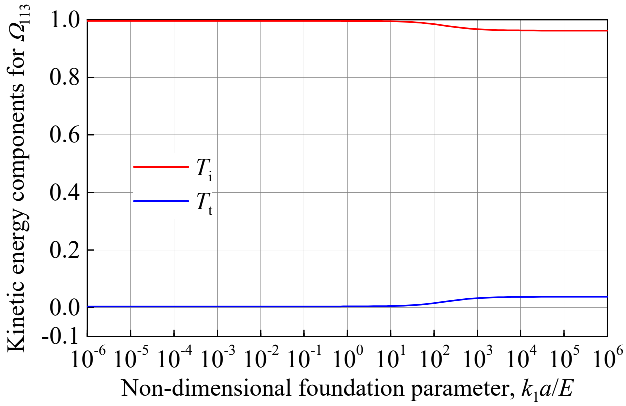


(b) 運動エネルギ成分

図-4　薄板の二次振動Ω_{112}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a=0.05$, $b/a=1$



(a) 弾性ひずみエネルギ成分



(b) 運動エネルギ成分

図-5　薄板の三次振動Ω_{113}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a=0.05$, $b/a=1$

平板の自由振動と同じと考えてよかろう．なお，$k_1a/E>10^0$の範囲も$U_W\approx0$であるが，これは式(7)から明らかなように地盤反力係数k_1の増大にともなって境界∂V_5の面外変位振幅Wは拘束され，$W\to0$ となるためである．一般に，固有振動数Ω_{111}の数値情報のみではどのような振動状態であるかを判断することは難しいが，運動エネルギ成分と弾性ひずみエネルギ成分を計算して指標とすれば，固有振動数に対応する固有振動モードを描かなくても系の振動状態に関する情報を得ることができる．

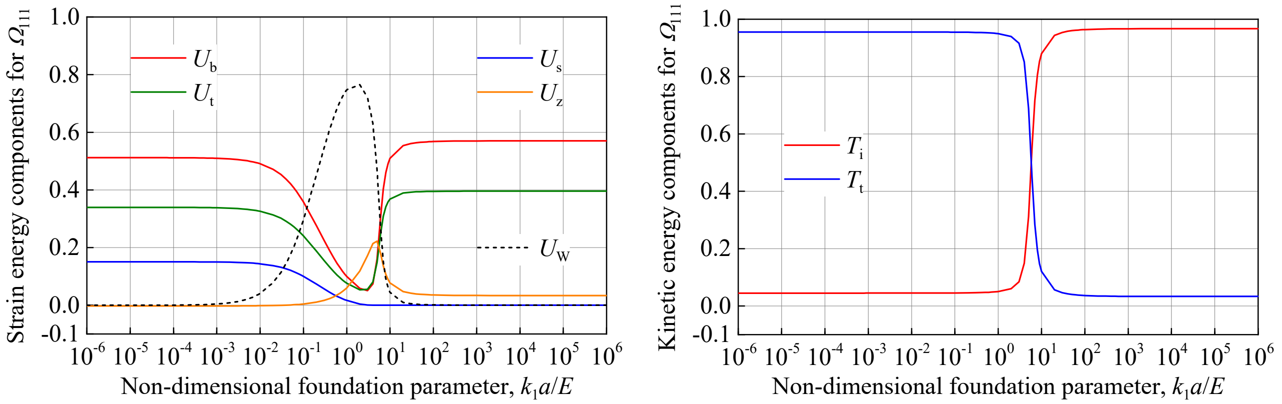
図-4と**図-5**は，それぞれ板厚比$h/a=0.05$の正方形薄板の二次振動Ω_{112}と三次振動Ω_{113}の規格化された各エネルギ成分を対象として**図-3**と同様の検討を行ったものである．**図-4** (b)より，$k_1a/E<10^0$の範囲のΩ_{112}はT_iが支配的な自由振動であるが，$k_1a/E>10^0$の範囲はT_tが支配的になる．また，**図-4** (a)からは，$k_1a/E>10^0$の範囲では薄板理論では無視されるU_zが卓越する自由振動状態であることがわかる．他方，**図-5** (a), (b)は，Ω_{113}はk_1a/Eに関係なくT_iとU_sが支配的な自由振動であること示してくれている．

b）中等厚板

図-6，**図-7**および**図-8**は，それぞれ板厚比$h/a=0.2$の正方形中等厚板の基本振動Ω_{111}，二次振動Ω_{112}および三次振動Ω_{113}の規格化された各エネルギ成分に与える無次元地盤反力係数k_1a/Eの影響である．ここで，(a)は弾性ひずみエネルギ成分，(b)は運動エネルギ成分であり，k_1a/Eはa）**薄板**と同様に10^{-6}から10^6まで変化させた．**図-6**，**図-7**および**図-8**の(b)より，k_1a/Eに対する運動エネルギ成分T_i, T_tの変動は，振動次数に係わらず概ね薄板のそれと同様である．ただし，Ω_{111}とΩ_{113}は，板厚比h/aが大きくなったことによる面内変位と面外変位の連成が確認できる．k_1a/Eに対する弾性ひずみエネルギ成分U_b, U_t, U_s. U_z, U_Wの変化についても概ね薄板のそれと同様であることが**図-6**，**図-7**および**図-8**の(a)からわかる．ただし，各エネルギ量の割合は異なっている．例えば，**図-6** (a)より，$k_1a/E<10^{-1}$の範囲のU_sは**図-3** (a)よりも増加し，U_b, U_tおよびU_Wは減少している．これは板厚比h/aが大きくなったことによる面外せん断変形の影響を定量的に表したものである．なお，U_zはほぼ零であるので，中等厚板のΩ_{111}にも面外伸縮変形は殆ど生じない．

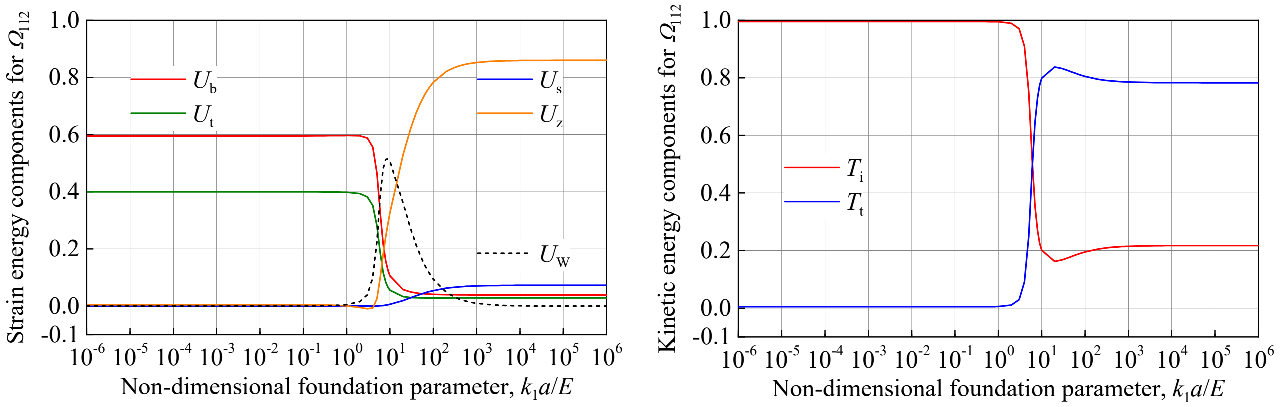
c）厚板

最後に，板厚比$h/a=0.4$の正方形厚板の基本振動Ω_{111}，二次振動Ω_{112}および三次振動Ω_{113}の規格化された各エネルギ成分を対象として，a）**薄板**およびb）**中等厚板**と同様の検討を行ったものをそれぞれ**図-9**，**図-10**および**図-11**に示し



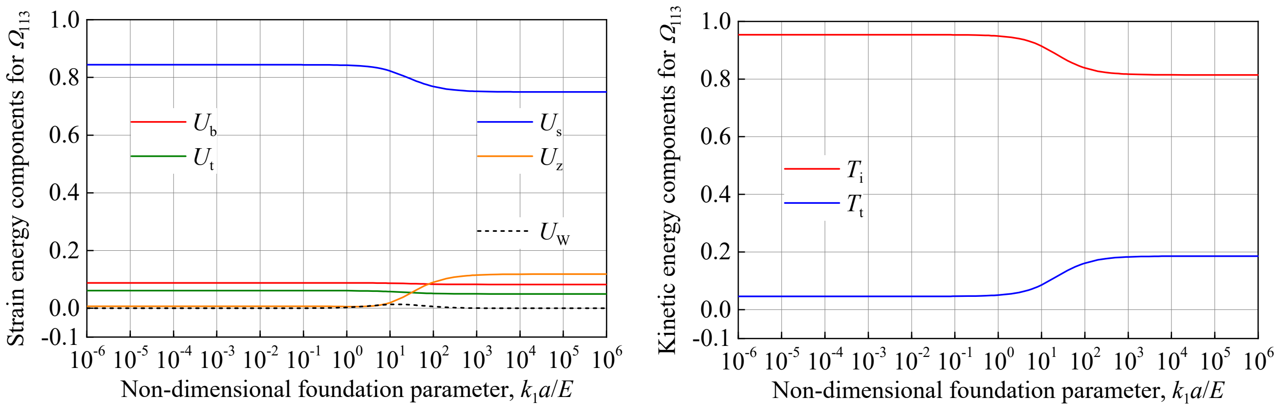
(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

図-6　中等厚板の基本振動Ω_{111}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.2$, $b/a = 1$



(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

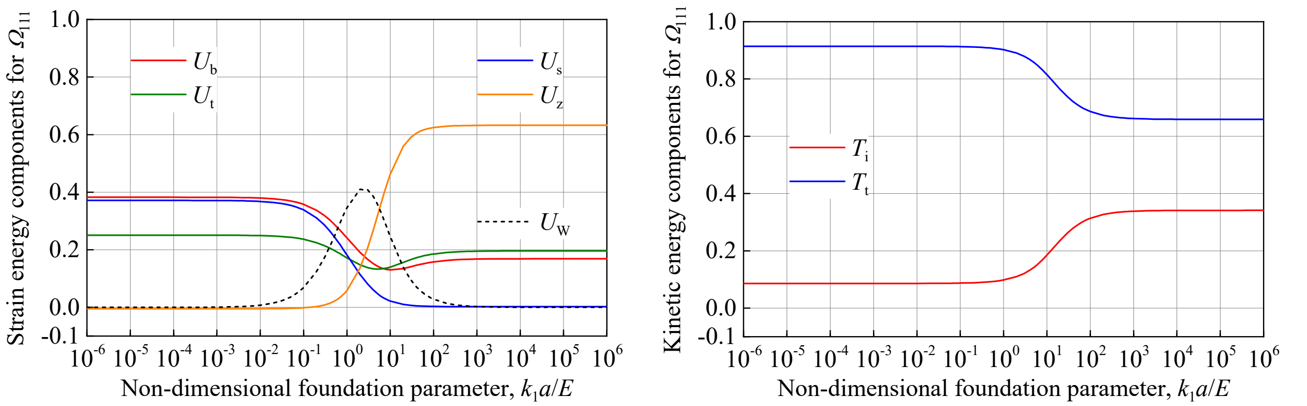
図-7　中等厚板の二次振動Ω_{112}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.2$, $b/a = 1$



(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

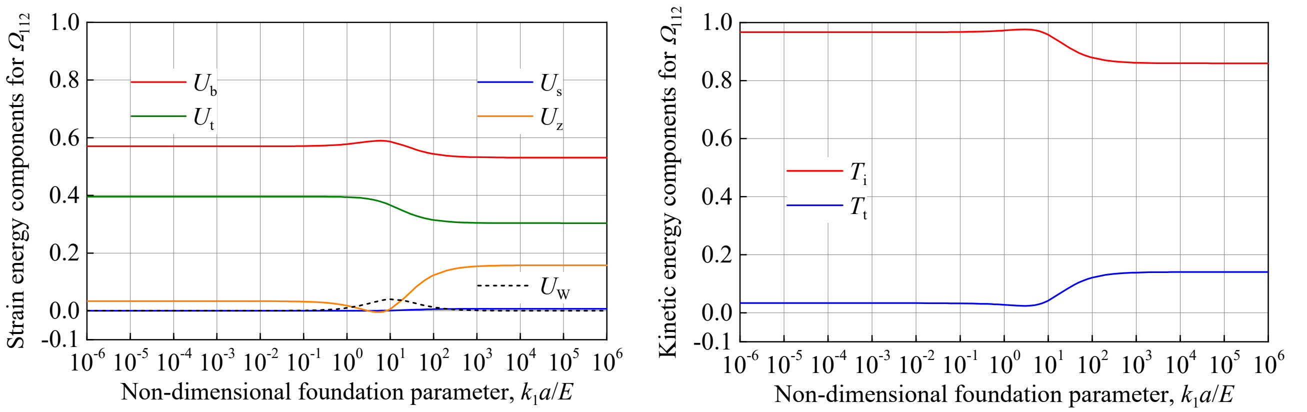
図-8　中等厚板の三次振動Ω_{113}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.2$, $b/a = 1$

た．**図-9**，**図-10**および**図-11**の(b)より，k_1a/Eに対する運動エネルギ成分T_i, T_tは，振動次数にかかわらず**図-8 (b)**と同様の変動を示している．ただし，Ω_{111}の運動エネルギ成分T_i, T_tの大小関係は$T_i < T_t$であり，Ω_{112}とΩ_{113}のそれは$T_i > T_t$である．$k_1a/E < 10^{-1}$のΩ_{111}のT_iは中等厚板のそれよりも値が大きくなり，T_tは減少している．これは，板厚が大きくなることにより，面内変位に関する慣性の影響が現れることを意味していると考えられる．また，$h/a = 0.4$になるとΩ_{112}のT_tが僅かに生じており，若干ではあるが面内変位と面外変位が連成しているようである．次に，**図-9 (a)**の$k_1a/E < 10^0$の範囲のk_1a/Eに対する弾性ひずみエネルギ成分U_b, U_t, U_s. U_z, U_Wの変動は，**図-6 (a)**の中等厚板とほぼ同様であるが，板厚が大きくなったことにより$U_b \approx U_s$となり，U_Wは小さくなっている．また，**図-10 (a)**と**図-11 (a)**より，$k_1a/E < 10^0$の範囲でU_z が生じており，Ω_{112}とΩ_{113}の自由振動には面外伸縮変形の成分が混在していることもわかる．さらに，



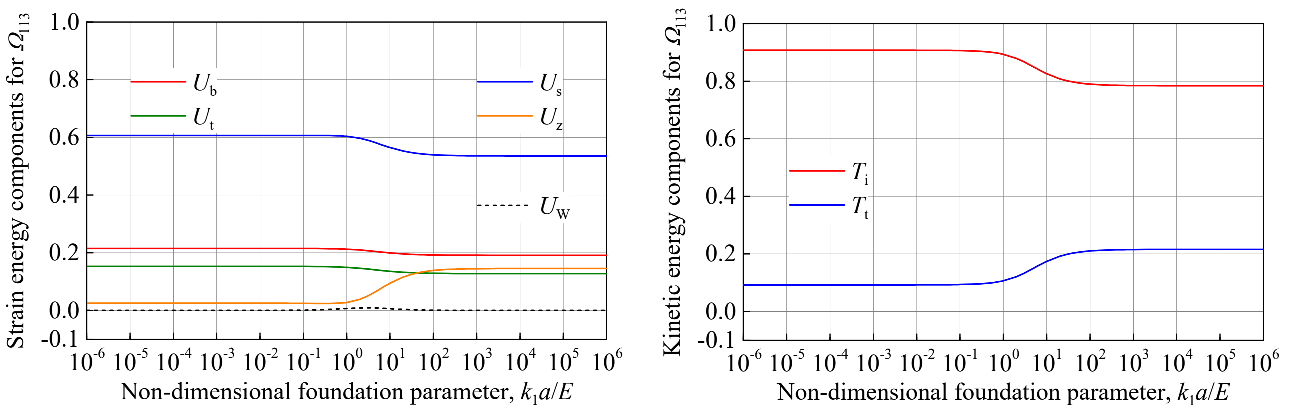
(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

図-9　厚板の基本振動Ω_{111}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.4$, $b/a = 1$



(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

図-10　厚板の二次振動Ω_{112}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.4$, $b/a = 1$



(a) 弾性ひずみエネルギ成分　　(b) 運動エネルギ成分

図-11　厚板の三次振動Ω_{113}の規格化されたエネルギに与える無次元地盤反力係数 k_1a/E の影響: $h/a = 0.4$, $b/a = 1$

図-3 (b)から**図-11** (b)より，面内変位と面外変位の連成が大きいときにU_z が生じていることも確認できる．

以上より，地盤反力係数に対する弾性地盤－平板系の自由振動の全弾性ひずみエネルギと全運動エネルギにおける各エネルギ成分の寄与率の変動は，振動固有値問題の解（固有円振動数とこれに対応する固有振動モード）の理解を手助けする有益な基礎資料の一つを提供していると言えよう．特に，地盤反力係数に対する弾性地盤に蓄えられる弾性エネルギ成分の変動は，弾性地盤－平板系の自由振動における弾性地盤と平板との幾何学的相互作用の影響を定量的に表す指標の一つである．また，**図-3** (a)から**図-11** (a)は，板厚が大きくなると，各自由振動の弾性地盤に

蓄えられる弾性エネルギ成分は減少し，弾性地盤と平板との幾何学的相互作用の影響が小さくなることを定量的に示している．

５．おわりに

本稿では，弾性地盤－平板系の自由振動性状の理解を手助けするための基礎資料の一つとして，弾性地盤の地盤反力係数に対する弾性地盤－平板系が自由振動するときの全弾性ひずみエネルギと全運動エネルギにおける個々のエネルギ成分の寄与率の変動に関する情報を三次元弾性論に基づく理論解析により提供した．また，矩形平板が面外曲げの自由振動するときに弾性地盤に蓄えられる弾性エネルギ成分は，弾性地盤－平板系の自由振動における弾性地盤と平板との幾何学的相互作用の影響を定量的に表す指標の一つであることを示した．なお，本稿の**表-1**と**表-2**で示した弾性地盤－平板系の無次元振動数とこれに対応する自由振動の運動エネルギ成分および弾性ひずみエネルギ成分の数値は，各種数値解析法のコード検証の参照解に使っていただければ幸いである．

今後は，平板の周面の支持条件を設計変数として，弾性地盤上にある平板の自由振動性状に関する基礎資料の蓄積を継続していく予定である．

謝　　辞：本稿で用いた厳密解の導出にあたっては，明石工業高等専門学校 都市システム工学科 石丸和宏教授（当時）からご指導・ご助言を賜りました．また，名古屋大学情報基盤センターからはNUMPACKのNOLEQQのソースコードを提供していただきました．なお，本稿の有限要素解析は，平成24（2012）年度補正予算により導入された設備機器の一部を用いて実施しました．ここに記して謝意を示します．

参考文献

1) Srinivas, S., Joga Rao, C.V. and Rao, A.K.: An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.12 (2), pp.187-199, 1970.
2) Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H. and Au, F.T.K.: Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.59 (10), pp.1313–1334, 2004.
3) Dehghan, M. and Baradaran, G.H.: Buckling and free vibration analysis of thick rectangular plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature method, Applied Mathematics and Computation, Vol.218 (6), pp.2772-2784, 2011.
4) Liu, H., Liu, F., Jing, X., Wang, Z. and Xia, L.: Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation with arbitrary boundary conditions, Shock and Vibration, Vol.2017, Article ID 3425298, 10 pages, 2017.
5) Lin, Z. and Shi, S.: Three-dimensional free vibration of thick plates with general end conditions and resting on elastic foundations, Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, Vol.38 (1), pp.110-121, 2018.
6) Dehghany, M. and Farajpour, A.: Free vibration of simply supported rectangular plates on Pasternak foundation: An exact and three-dimensional solution, Engineering Solid Mechanics, Vol.22, pp.29-42, 2014.
7) 稲田真大，田川達也，名木野晴暢，足立忠晴: Winkler基礎上にある周面単純支持された弾性直方体の面外自由振動の閉じた形式の三次元弾性解，土木構造・材料論文集，第39号.（投稿中）
8) 田川達也，稲田真大，名木野晴暢，足立忠晴：弾性基礎上にある周面単純支持された矩形平板の面外自由振動に関する厳密な三次元弾性解析，構造工学論文集，Vol. 70A.（投稿中）
9) de Souza, V.C.M. and Croll, J.G.A.: An energy analysis of the free vibrations of isotropic spherical shells, Journal of Sound and Vibration, Vol.73 (3), pp.379-404, 1980.
10) 芳村仁，三上隆，朴勝振：逆対称アングル･プライ積層板の自由振動，構造工学論文集，Vol.37A, pp.911-919, 1991.
11) 名木野晴暢，清成康平，水澤富作，三上隆：B-spline Ritz法による任意の支持条件を有する矩形板の三次元自由振動問題のエネルギー解析，構造工学論文集，Vol.60A, pp.1-14, 2014.
12) 名木野晴暢，大川茉友子，樋口理宏，足立忠晴，水澤富作，三上隆：種々の面外荷重を受ける弾性基礎上にある厚肉平板の三次元応力解析，構造工学論文集，Vol.58A, pp.26-39, 2012.
13) 白鳥正樹，越塚誠一，吉田有一郎，中村均，堀田亮年，高野直樹（共著）：工学シミュレーションの品質保証とV&V，丸善出版，pp.95-115, 2013.
14) 山田貴博（監訳），永井学志・松井和己（訳）：有限要素法（ABAQUS Student Edition付，原書: A First Course in Finite Elements; Fish, J. and Belytschko, T.），丸善出版，pp.239-245, 2008.
15) Abaqus Analysis User’s Manual: Vol.IV Elements Version 6.11, Dassault Systemes Simulia, ABAQUS Inc., 2011.

（2023.9.14受付）