留数定理を利用した実積分計算の有用性

福村　浩亨

一般科理系

概 要

実関数の積分では, 置換積分や部分分数分解を利用, はさみこみなど様々な手法がある.
本稿では留数定理を用いた解法を紹介し, 積分計算をする上でより高次な数学の学習に興味・関心をもってもらいたい.

キーワード：積分, 留数定理

1　留数定理

α は $f(z)$ の孤立特異点とする. このとき $f(z)$ は, α を中心とするローラン展開級数で表される.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad 0 < |z-\alpha| < R$$

次に点 α を内部に含む単純閉曲線 C を考える. $f(z)$ は C および C の内部において, 点 α を除いて正則とする. $f(z)$ の両辺の C に沿う積分を求めると

$$\int_C f(x)dz = \cdots + a_{-1}\int_C \frac{dz}{z-\alpha} + \cdots$$

コーシーの積分定理を用いて,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

右辺の積分の値は C の選び方に無関係である. この a_{-1} の値を点 α における $f(z)$ の留数といい , $\mathrm{Res}[f:\alpha]$ とかく. また, 定義から次の等式が導ける.

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f:\alpha]$$

【留数定理】

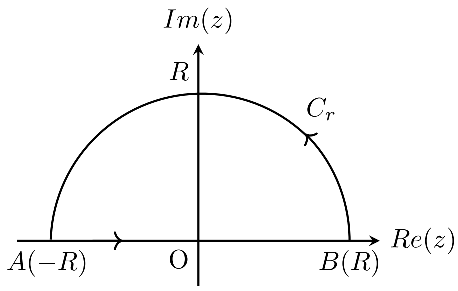
単純閉曲線 C の内部にある特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を除き, C の周および内部で $f(z)$ が正則ならば
$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}[f:\alpha_1] + \cdots + \mathrm{Res}[f:\alpha_n])$$

2　実積分の解法例

問題 1
$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+a^2}dx$ の値を求めよ.
ただし, $a > 0$ とする.

実積分から複素積分に拡張させる.

以下のような経路 $C = C_r + C_{AB}$ を半径 R の以下の半円で反時計回りとすると,



$$\int_C \frac{a}{z^2+a^2}dz = \int_{C_{AB}} \frac{a}{z^2+a^2}dz + \int_{C_R} \frac{a}{z^2+a^2}dz$$

左辺について, 2 次方程式 $z^2+a^2=0$ の解はそれぞれ $\alpha = ia$, $\beta = -ia$. R は十分大きいものとすると α のみ経路 C の内部にある. また, α は 1 位の極であり留数は,

$$\mathrm{Res}[f:\alpha] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{a}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \lim_{z\to\alpha}\frac{a}{(z-\beta)} = \frac{1}{2i}$$

よって, 留数定理より,

$\int_C \frac{a}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$
右辺の C_{AB} と C_r について,

$$\int_{C_{AB}} \frac{a}{z^2+a^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{a}{x^2+a^2}dx \overset{R\to\infty}{\Longrightarrow} I$$

C_r 上の点 $z = Re^{i\theta}$ から, $dz = iRe^{i\theta}$

$$\int_{C_r} \frac{a}{z^2+a^2}dz = \int_0^{\pi} \frac{aRie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+a^2}d\theta$$

$$\left|\int_{C_r} \frac{a}{z^2+a^2}dz\right| \le \int_{C_r} \left|\frac{a}{z^2+a^2}\right| |dz|$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{aR}{|R^2e^{2i\theta}+a^2|}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{aR}{|(R^2\cos 2\theta + a^2) + iR^2 \sin 2\theta|}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{aR}{\sqrt{(R^2\cos 2\theta + a^2)^2 + R^4\sin^2 2\theta}}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{aR}{\sqrt{R^4+a^4+2a^2R^2\cos 2\theta}}d\theta \overset{R\to\infty}{\Longrightarrow} 0$$

よって,

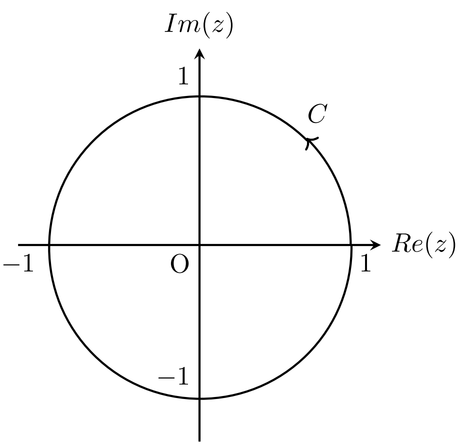
$$\int_{C_{AB}} \frac{a}{z^2+a^2}dz + \int_{C_R} \frac{a}{z^2+a^2}dz = I$$

$$= \int_C \frac{a}{z^2+a^2}dz = \pi$$

□

問題 2
$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\theta}d\theta$ の値を求めよ.
ただし, $a > b > 0$ とする.

以下のような経路 C を中心原点, 半径 1 の円とする.



実積分から複素積分に拡張させる.
$z = e^{i\theta}$ とおき, $\int_C \frac{1}{a+b\sin z}dz$ を求める.

$z = e^{i\theta}$ から $dz = ie^{i\theta}d\theta$. よって, $d\theta = \frac{1}{iz}dz$.

また, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\theta}d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{2}{bz^2+2aiz-b}dz.$$

2 次方程式 $bz^2+2aiz-b=0$ の解はそれぞれ,
$\alpha = \frac{-ia+\sqrt{a^2-b^2}i}{b}$, $\beta = \frac{-ia-\sqrt{a^2-b^2}i}{b}$
となる. $a > b > 0$ から $b^2-a^2 < 0$ となることに注意.
$-a+\sqrt{a^2-b^2} < -a+a = 0,\ -1 < \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$
$\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b} < \frac{-b}{b} = -1.$
以上から α のみ経路 C の内部にある. α は 1 位の極であり留数は,

$$\mathrm{Res}[f:\alpha] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{1}{b(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$= \lim_{z\to\alpha}\frac{1}{b(z-\beta)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}i}$$

よって, 留数定理より,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\theta}d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{2}{bz^2+2aiz-b}dz$$

$$= 2\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

□

3　留数定理を用いた積分計算

置換積分では新たな積分区間を求めたり, 特殊な置換方法を知らなければ積分の解に辿り着くことは難しい. 問題 1 では,$x = a\tan\theta$ と置換したり, 問題 2 では半角公式・加法定理など様々な性質を駆使して解くことができる. しかし, 複素関数論の留数定理を学ぶことによって, 実積分もあっという間に解けてしまう. 積分経路を上手くとる必要はあるが.

学習に対して意欲が低下している, または今勉強しているものは何のためになるのか. と考えている学生がいれば是非これを読んでもらいたい. 微力ながら学習意欲向上の助けになれば幸いである.

参考文献

[1] 遠節夫ほか, 新応用数学, 大日本図書 , pp.153 − 159