

局所的な表面力を受ける Winkler 基礎上の周面単純支持矩形板 の静的曲げ変形問題における三次元弾性論と板理論との比較

— 局所的な表面力の載荷幅が板の辺長の一割の場合 —

志賀 有人¹・名木野 晴暢²・足立 忠晴³・水澤 富作⁴・三上 隆⁵

¹ショーボンド建設株式会社, ²都市・環境工学科, ³豊橋技術科学大学, ⁴大同大学, ⁵北海道大学

著者らは Winkler 基礎上の矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにすることを目的とし, 周面単純支持された正方形板を対象として三次元弾性論に基づく解を正解とした理論比較を行ってきた。これまでに板部材に作用する面外荷重が, (1) 物体力として自重のみが作用する場合, (2) 表面力として全面等分布荷重のみが板上面に作用する場合, (3) 局所的な表面力として荷重載荷幅が板の辺長の半分である部分等分布荷重のみが板の上面に作用する場合, について検討を行い, 両理論の適用範囲を提案してきた。本稿では集中荷重に近い荷重状態として局所的な表面力の載荷幅を板の辺長の一割に設定し, これまでと同様の検討を行った。

キーワード：矩形板, Winkler 基礎, 局所的な表面力, 古典理論, Mindlin 理論

1. まえがき

著者らは面外荷重を受ける Winkler 基礎上の矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論¹⁾と Mindlin 理論²⁾の適用範囲を明らかにすることを目的とし, 板の周面が単純支持された正方形板を対象として三次元弾性論³⁾に基づく解を正解とした理論比較を行ってきた⁴⁾⁻⁶⁾。

文献 4), 文献 5) および文献 6) で取り扱っている解析モデルを図-1 に示す。ただし, 板部材に作用する面外荷重は省略している。

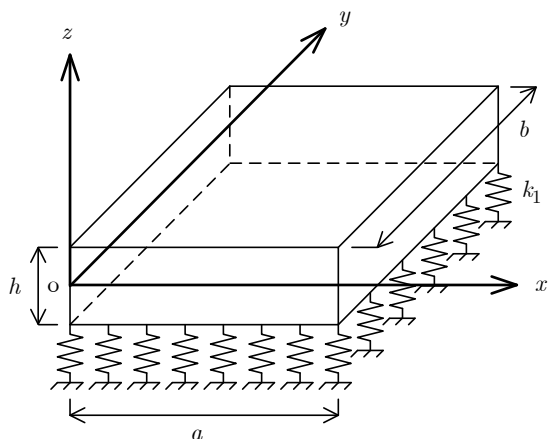


図-1 Winkler 基礎上の周面単純支持矩形板⁴⁾⁻⁶⁾

ここで, a は板の長さ, b は幅, h は厚さであり, k_1 は地盤反力係数である。文献 4), 文献 5) および文献 6) では, 板の厚さを表す無次元量を板厚比 h/a と定義し, また, 地盤反力係数を表す無次元量として,

$$\Theta = \frac{k_1 a}{E}, \quad (1)$$

を用いている。ただし, E は矩形板の縦弾性係数である。このように無次元量を定義した時, 志賀ら⁴⁾は面外方向の物体力を受ける Winkler 基礎上の周面単純支持正方形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を次のように提案している。

[1] 物体力を受ける Winkler 基礎にある $h/a \leq 0.01$ なる薄板部材の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は $\Theta \leq 10^{-4}$ の範囲である。

[2] 物体力を受ける Winkler 基礎にある板部材 ($0.01 < h/a \leq 0.5$) の静的曲げ変形問題における Mindlin 理論の適用範囲は $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲である。

また, 名木野ら⁵⁾は表面力として全面等分布荷重を受ける Winkler 基礎上の周面単純支持正方形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を次のように提案している。

[3] 全面等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある $h/a \leq 0.01$ なる薄板部材の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は, [1] と同様に $\Theta \leq 10^{-4}$ の範囲である。

- [4] 全面等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある正方形の板部材の曲げ問題における Mindlin 理論の適用範囲は, $0.01 < h/a \leq 0.3$ かつ $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲である. 更に, 志賀ら⁶⁾ は表面力として部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎上の周面単純支持正方形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を次のように提案している.
- [5] 荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.5a \times 0.5b$ である部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある $h/a \leq 0.01$ なる薄板部材の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は, [1], [3] と同様に無次元地盤反力係数 $\Theta \leq 10^{-4}$ の範囲である.
- [6] 荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.5a \times 0.5b$ である部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある正方形の板部材の曲げ問題における Mindlin 理論の適用範囲は, [4] と同様に板厚比 $0.01 < h/a \leq 0.3$ かつ $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲である.

これらの結果から, Winkler 基礎にある周面単純支持矩形板に作用する面外荷重が物体力の場合は板厚比 $h/a = 0.5$ なるかなり厚肉な板部材まで Mindlin 理論で解析することができるのに対して, 板部材に作用する面外荷重が板上面に作用する表面力の場合は板厚比 $h/a \leq 0.3$ なる厚肉な板部材まで Mindlin 理論によって解析することができる. このように, 面外荷重の状態は Mindlin 理論の適用範囲に影響する要因の一つであると考えられる. よって, 集中荷重のように表面力の局所性が大きくなる面外荷重モデルを対象として, 本問題の古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を検討することには十分な意義がある.

本稿では, 集中荷重に近い荷重状態として部分等分布荷重の載荷幅を板の辺長の一割に設定し, 文献 4), 文献 5) および文献 6) と同様の検討を行った.

2. 解析モデル

図-2 には, 部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある矩形板, 直交座標系および変位方向の定義が示してある. ここで, 等質・等方な矩形板は微小変形かつ線形弾性であり, その周面は単純支持されているとする. また, Winkler 基礎⁷⁾ は板下面で滑らかに完全密着しているものとする. なお, 図-3 に示すような点 (x_0, y_0) を中心とする載荷幅 $2c \times 2d$ かつ荷重強度が q_0 である部分等分布荷重 $q(x, y)$ は板上面に作用する表面力とし, 物体力 (自重) の影響は無視する. さらに, a は板の長さ, b は幅, h は厚さ, k_1 は地盤反力係数, $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ は, それぞれ, x, y, z 方向の変位成分である. なお, 三次元弾性論³⁾, Mindlin 理論²⁾ および古典理論¹⁾ に基づく支配方程式と境界条件については, 文献 6) を参照されたい.

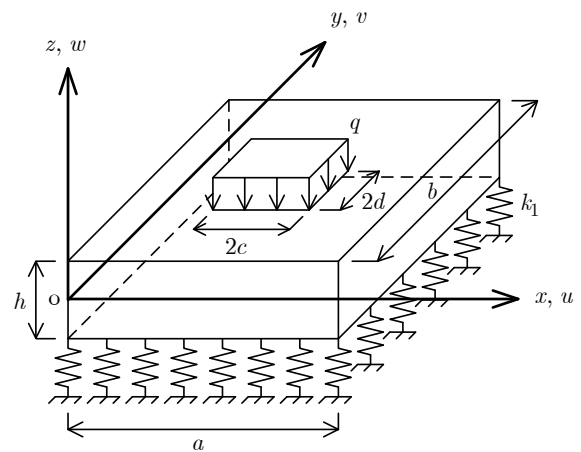


図-2 部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎上の矩形板と直交座標系

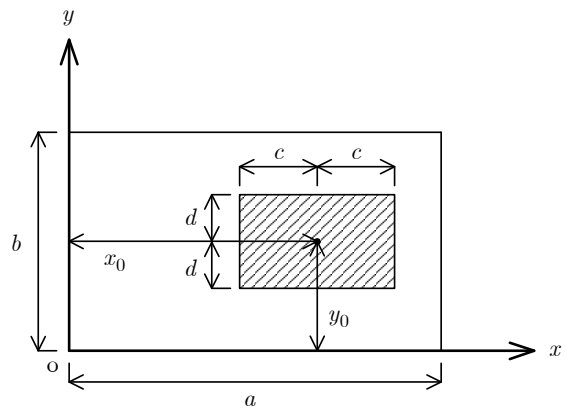


図-3 板上面に作用する局所荷重

3. 理論解析および考察

ここでは, 三次元弾性論に基づく解を正解とし, 矩形板に蓄積されるひずみエネルギーと弾性基礎に蓄えられる弾性エネルギーおよび矩形板の変位や応力の面内方向または板厚方向分布を評価指標とした理論比較を行い, 疑似的な集中荷重として載荷幅の小さい部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎上の周面単純支持矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにする.

本稿では, 文献 4), 文献 5) および文献 6) と同様に板厚と辺長を表す無次元量を, それぞれ, 板厚比 h/a , 辺長比 b/a と定義し, $(0.01 \leq h/a < 0.1)$ の範囲を薄板, $(0.1 \leq h/a < 0.3)$ の範囲を中等厚板, $(0.3 \leq h/a < 0.5)$ の範囲を厚板, $(h/a \geq 0.5)$ の範囲を極厚板と呼ぶことにする. なお, 地盤反力係数を表す無次元量には, 文献 4), 文献 5) および文献 6) で用いられている式(1)の無次元地盤反力係数 Θ を

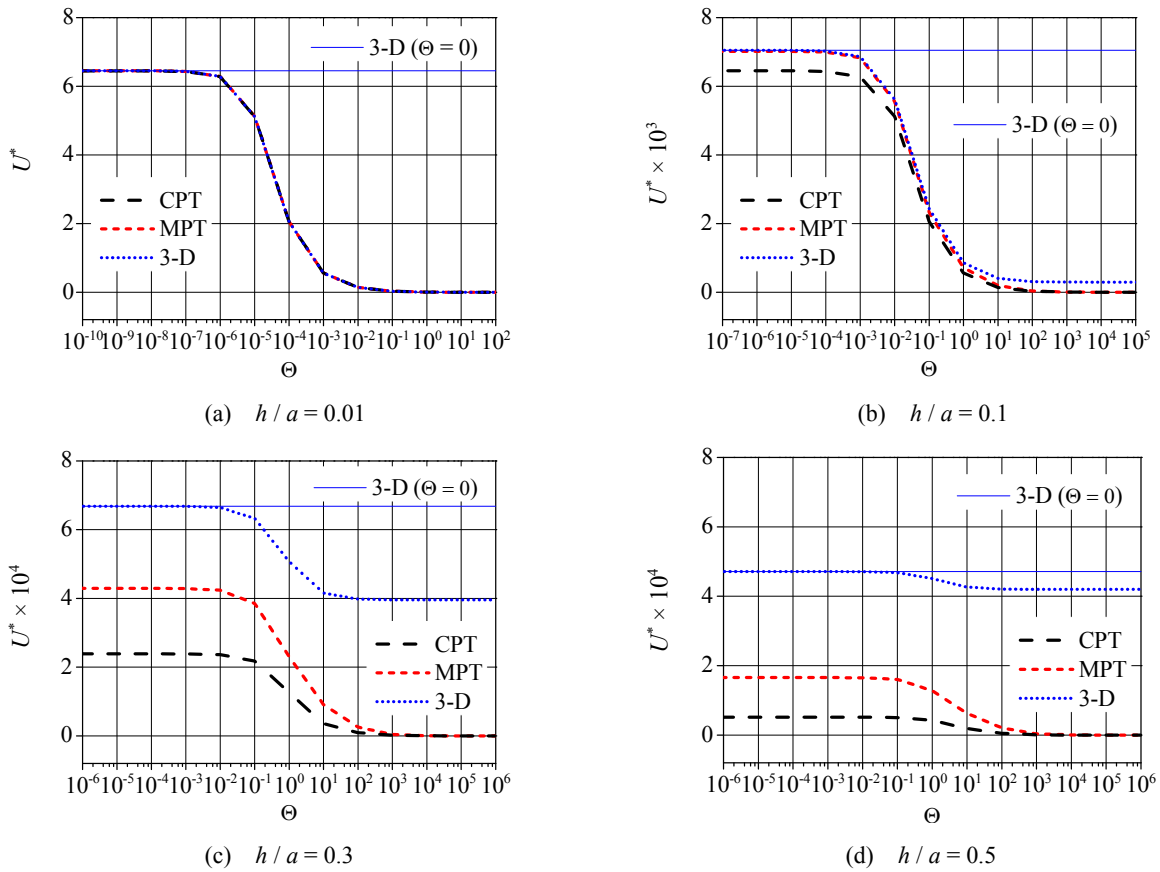


図-4 Winkler 基礎上の矩形板の全ひずみエネルギー U^* の理論比較

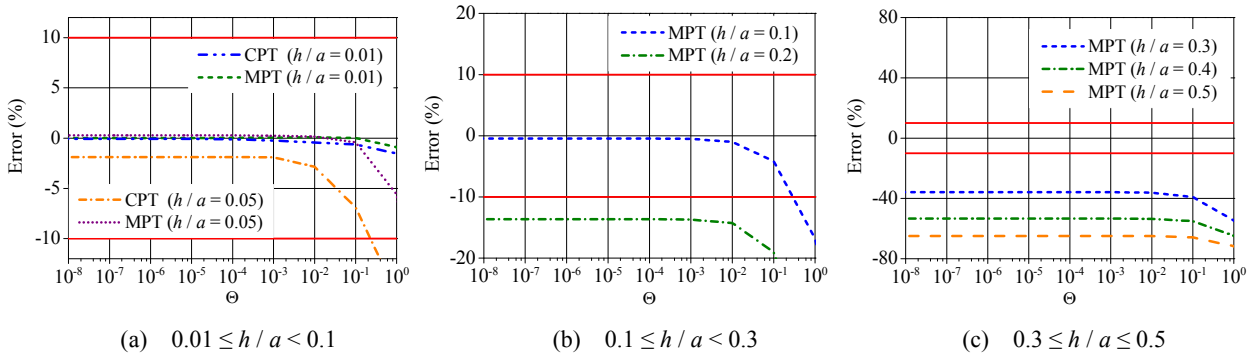


図-5 Winkler 基礎上の矩形板の全ひずみエネルギー U^* の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

用いる。ここで、鋼材とコンクリートからなる板部材を想定すると、無次元地盤反力係数 Θ は次の範囲の値を取る⁸⁾。

$$10^{-4} \leq \Theta \leq 10^{-2} \quad (2)$$

ゆえに、実際の構造設計を念頭に置いた場合、無次元地盤反力係数 $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲が工学的に意味を持つ。よって、本稿では、主にこの範囲を対象として議論するものとする。

三次元弾性論 (3-D) に基づく解に対する古典理論 (CPT) および Mindlin 理論 (MPT) に基づく解の相対誤差は、次のように算出する。

$$\text{Error} (\%) = \frac{(\text{CPT}) - (3\text{-D})}{3\text{-D}} \times 100,$$

$$\text{Error} (\%) = \frac{(\text{MPT}) - (3\text{-D})}{3\text{-D}} \times 100. \quad (3)$$

なお、文献4), 文献5) および文献6) と同様に、許容誤差は $\pm 10\%$ とした。

理論解析では、特に断りがない限り、正方形の板部材 $b/a = 1$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ 、Mindlin 理論のせん断修正係数 $\kappa = 5/6$ を用いる。また、板上面に作用する部分等分布荷重は板の中央 $(x_0, y_0) = (a/2, b/2)$ に作用するものとし、その載荷幅 $2c \times 2d$ は板の辺長 a, b の一割として $2c \times 2d = 0.1a \times 0.1b$ に設定した。なお、全ての数値計算は Fortran の四倍精度計算を実施し、変位成分、ひずみエネルギー成

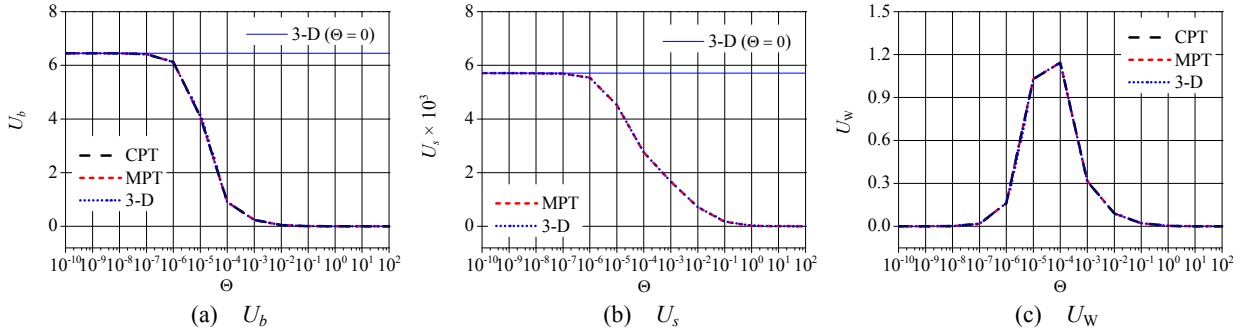


図-6 Winkler 基礎上の薄板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.01$

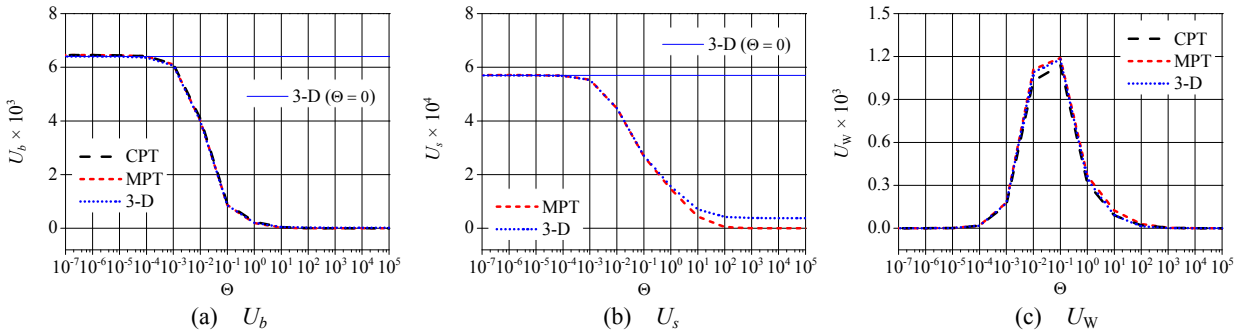


図-7 Winkler 基礎上の中等厚板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.1$

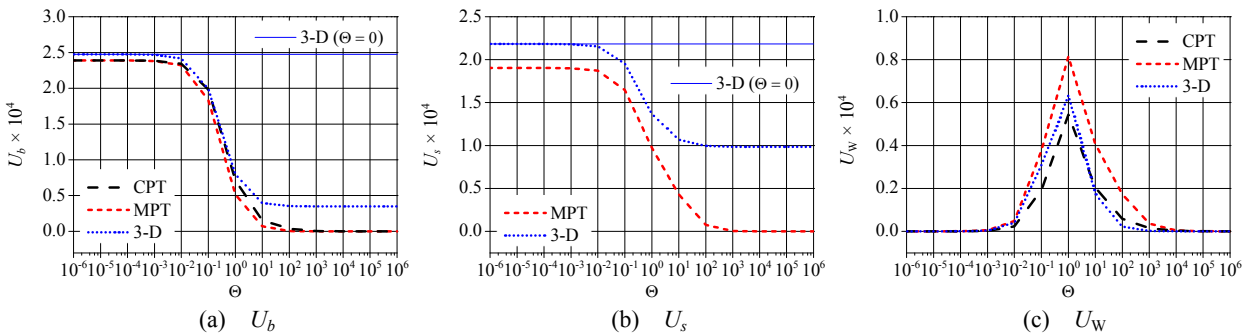


図-8 Winkler 基礎上の厚板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.3$

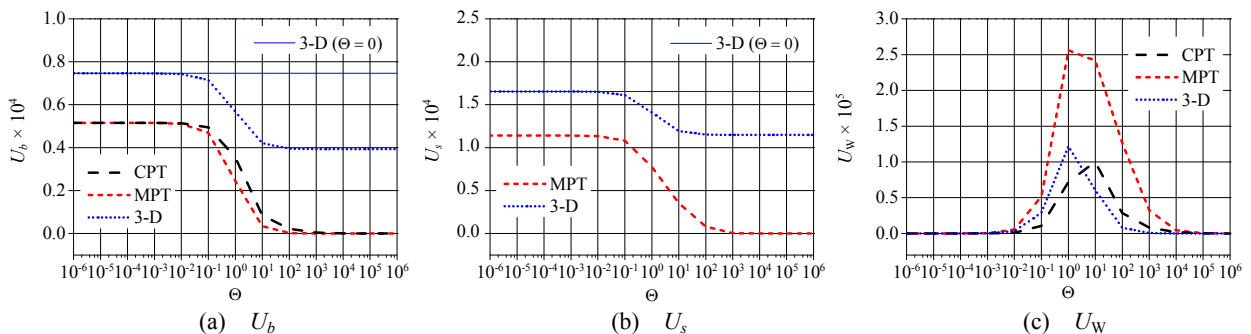


図-9 Winkler 基礎上の極厚板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.5$

分と弾性エネルギー成分の値は有効数字四桁での収束値、応力成分の値は有効数字三桁での収束値で数値実験結果を整理した。

(1) ひずみエネルギーと弾性エネルギーを指標とした理論比較

図-4 は、三次元弾性論 (3-D), Mindlin 理論 (MPT) お

よび古典理論 (CPT) に基づいて求めた Winkler 基礎上にある矩形板の全ひずみエネルギー U^* と無次元地盤反力係数 Θ および板厚比 h/a の関係を示したものである。ここで、板厚比 h/a は 0.01 (薄板), 0.1 (中等厚板), 0.3 (厚板), 0.5 (極厚板) に設定し、無次元地盤反力係数 Θ の値は 10^{-10} から 10^6 と広範囲で変化させた。また、青色の実線は、三次元弾性論に基づく Winkler 基礎に接していない矩形板 (Θ

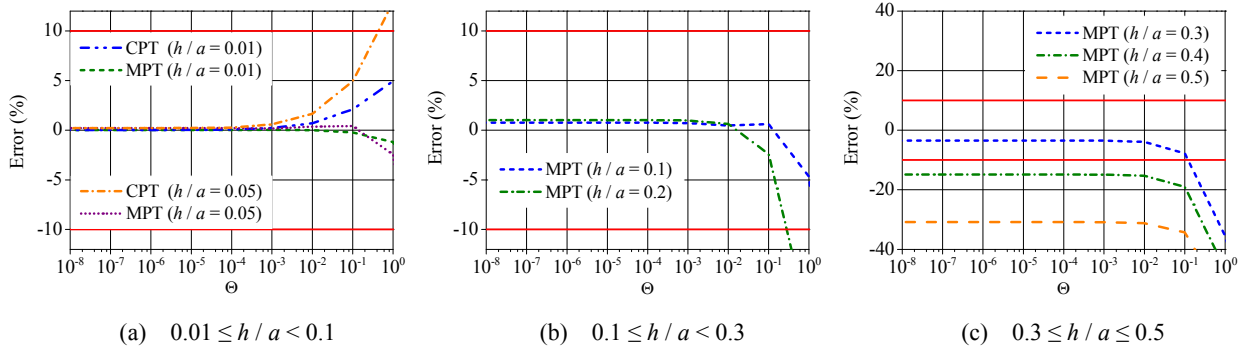


図-10 矩形板の曲げ変形成分のひずみエネルギー U_b の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

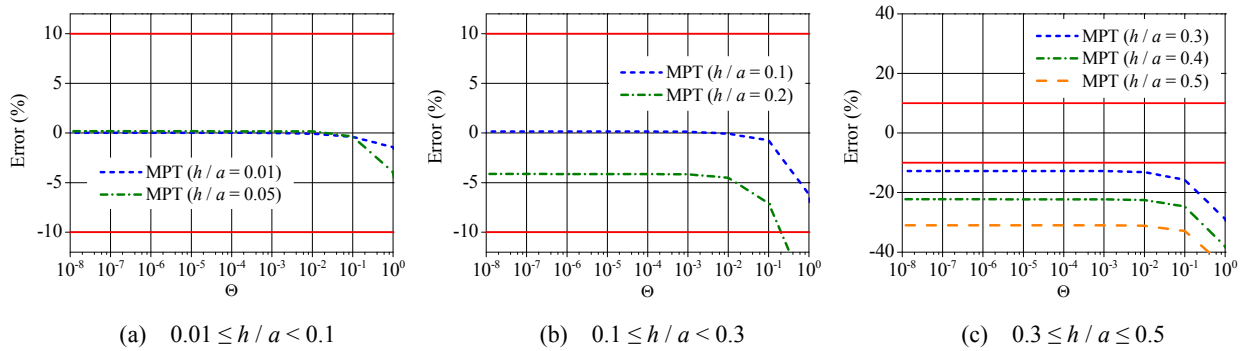


図-11 矩形板の面外せん断変形成分のひずみエネルギー U_s の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

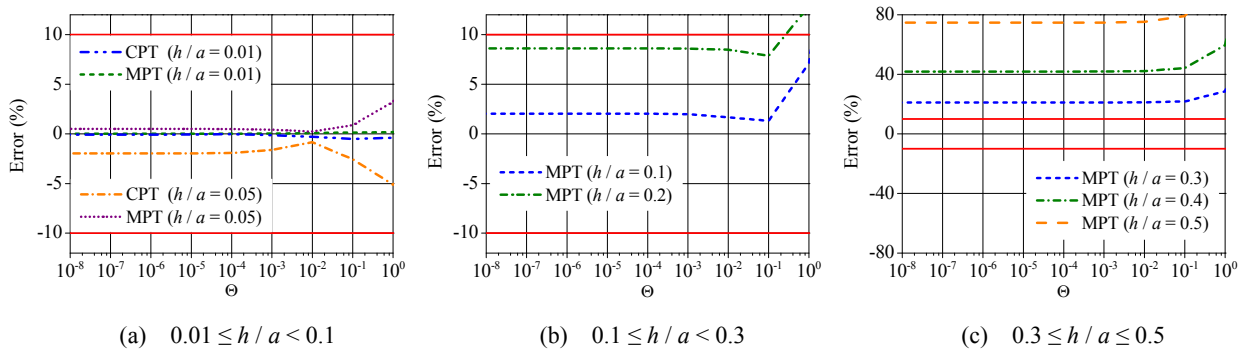


図-12 Winkler基礎に蓄えられる弾性エネルギー U_w の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

$= 0$) の全ひずみエネルギー U^* である。次いで、Winkler 基礎にある矩形板の全ひずみエネルギー U^* の Mindlin 理論と古典理論との相対誤差と無次元地盤反力係数 Θ および板厚比 h/a の関係を図-5 に示す。ここで、図中の赤色の実線は許容誤差 $\pm 10\%$ を意味する。参考までに、図-6、図-7、図-8、図-9 には、それぞれ、板厚比 h/a が 0.01 (薄板)、0.1 (中等厚板)、0.3 (厚板) および 0.5 (極厚板) である矩形板の曲げ変形成分のひずみエネルギー U_b 、矩形板の面外せん断変形成分のひずみエネルギー U_s および Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギー U_w と無次元地盤反力係数 Θ の関係を、図-10、図-11、図-12 には、それぞれ、矩形板の曲げ変形成分のひずみエネルギー U_b 、矩形板の面外せん断変形成分のひずみエネルギー U_s 、Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギー U_w の古典理論 (CPT) と Mindlin 理論 (MPT) の相対誤差と無次元地盤反力係数 Θ

および板厚比 h/a の関係を示した。

これらの結果より、板部材に蓄積されるひずみエネルギーと Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギーの値を指標とし、無次元地盤反力係数 Θ が $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲を対象とすれば、古典理論は板厚比 $h/a < 0.1$ の範囲、Mindlin 理論は板厚比 $h/a \leq 0.1$ の範囲で適用できる可能性がある。

(2) 変位と応力の面内方向または板厚方向分布を指標とした理論比較

図-13 から図-16 は、それぞれ、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ である Winkler 基礎上の薄板 ($h/a = 0.01$) の板中央点 $(x, y) = (a/2, b/2)$ における面外変位 w^* と応力 σ_x^* の板厚方向分布、部分等分布荷重が作用していない点 $(x, y) = (a/5, b/5)$ の位置における面外せん断応力 τ_{xz}^* の板厚方向分布および部分等分布荷重が作用している境界

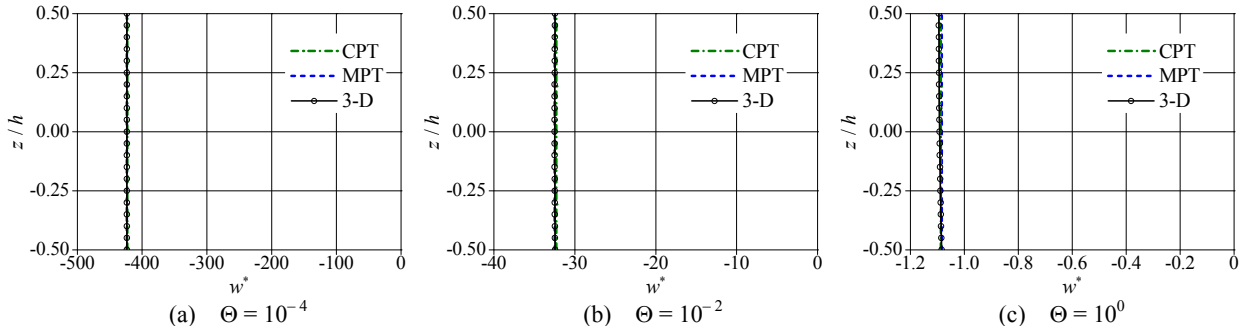


図-13 Winkler基礎上の薄板の面外変位の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/2, b/2)$

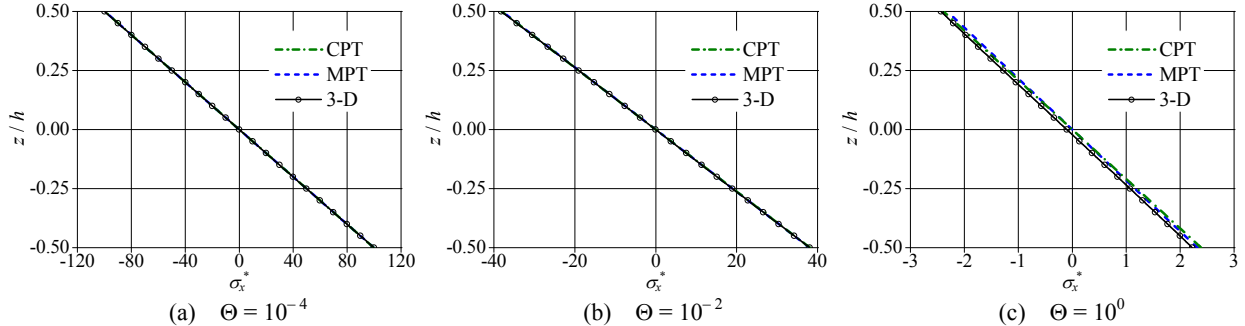


図-14 Winkler基礎上の薄板の応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/2, b/2)$

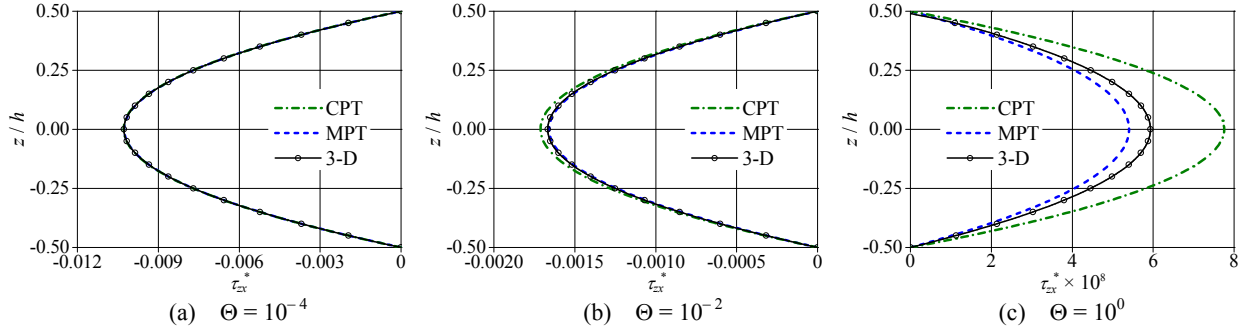


図-15 Winkler基礎上の薄板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/5, b/5)$

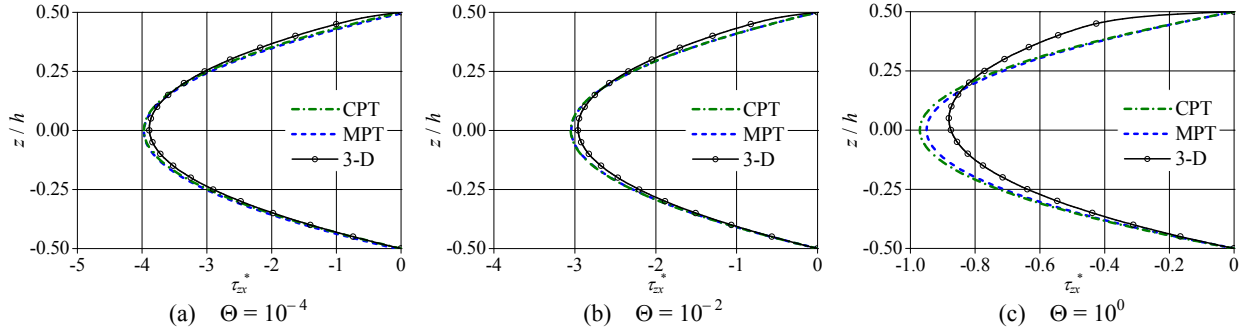


図-16 Winkler基礎上の薄板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (0.45a, 0.45b)$

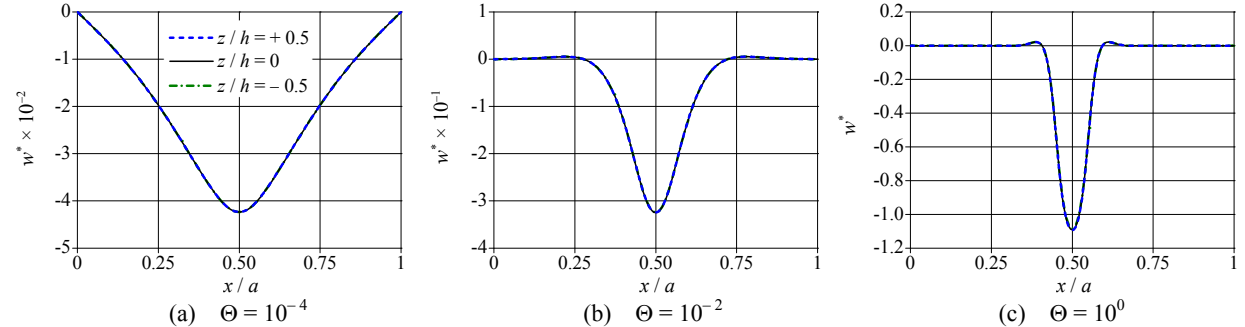


図-17 Winkler基礎上の薄板の面外変位の x 軸方向分布 : $h/a = 0.01, y = 0.5b$

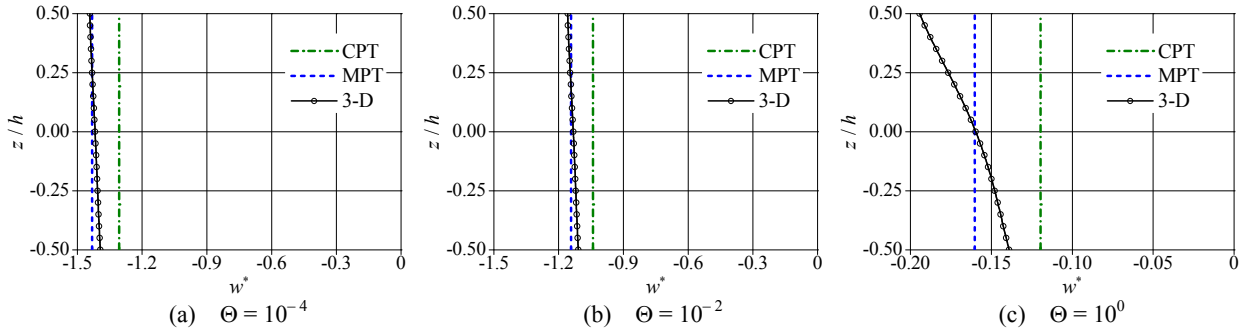


図-18 Winkler基礎上の中等厚板の面外変位の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/2, b/2)$

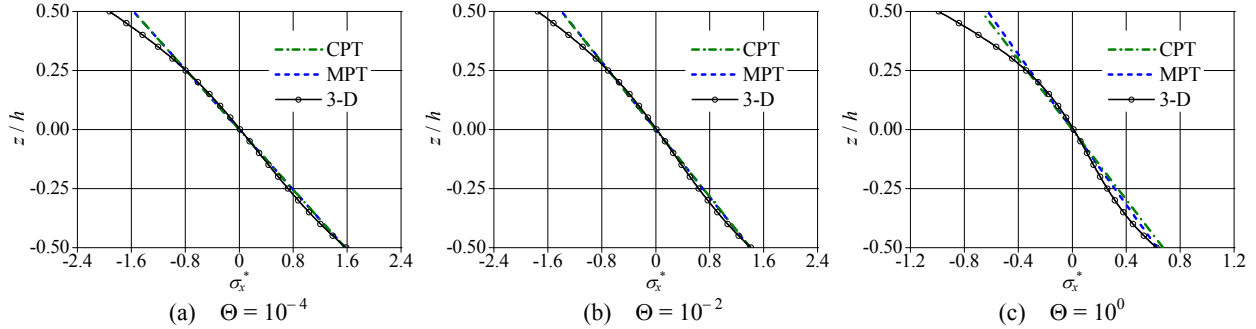


図-19 Winkler基礎上の中等厚板の応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/2, b/2)$

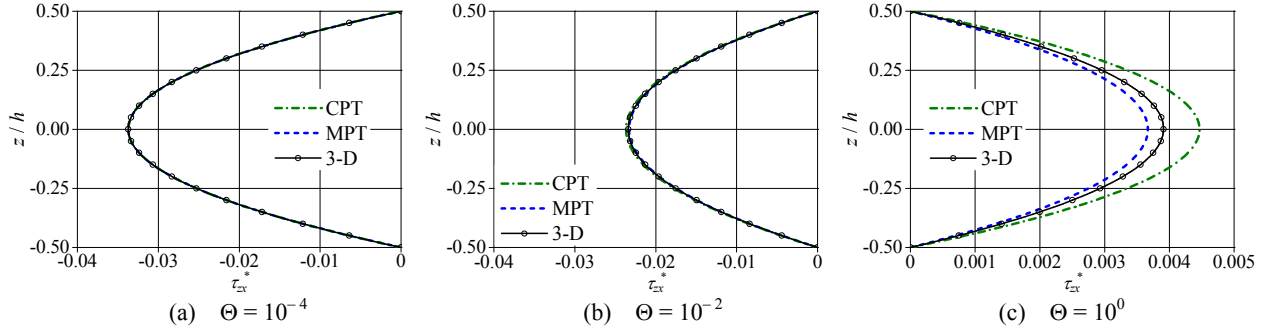


図-20 Winkler基礎上の中等厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/5, b/5)$

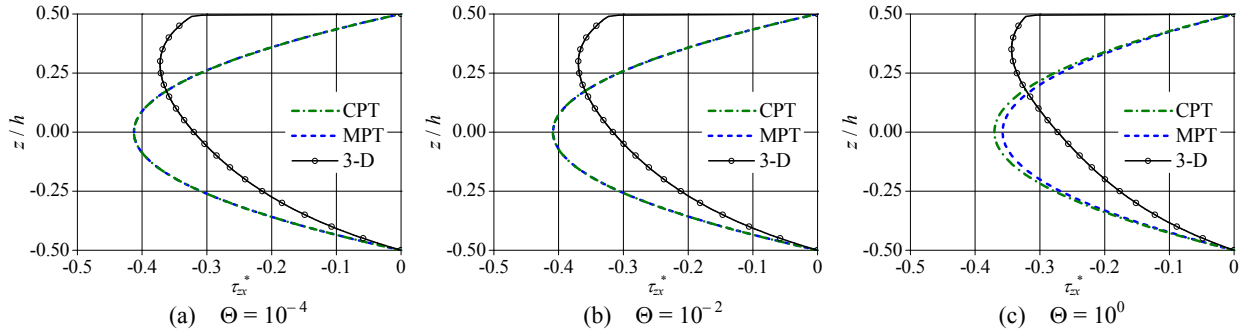


図-21 Winkler基礎上の中等厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (0.45a, 0.45b)$

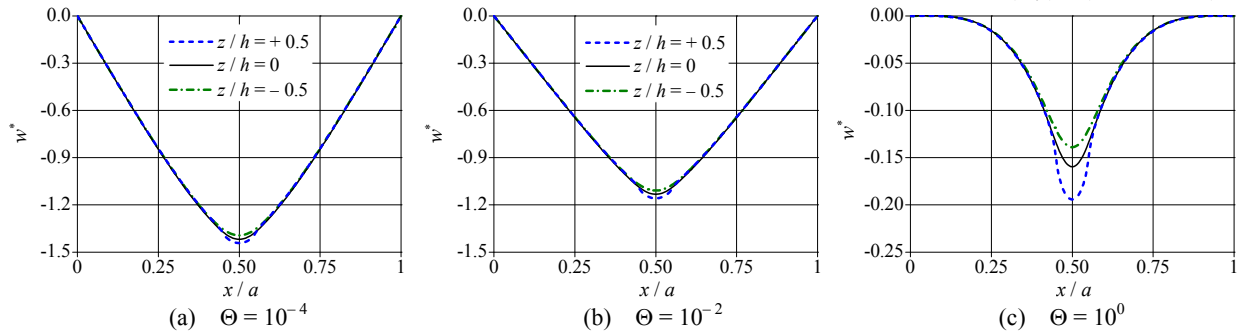


図-22 Winkler基礎上の中等厚板の面外変位のx軸方向分布 : $h/a = 0.1, y = 0.5b$

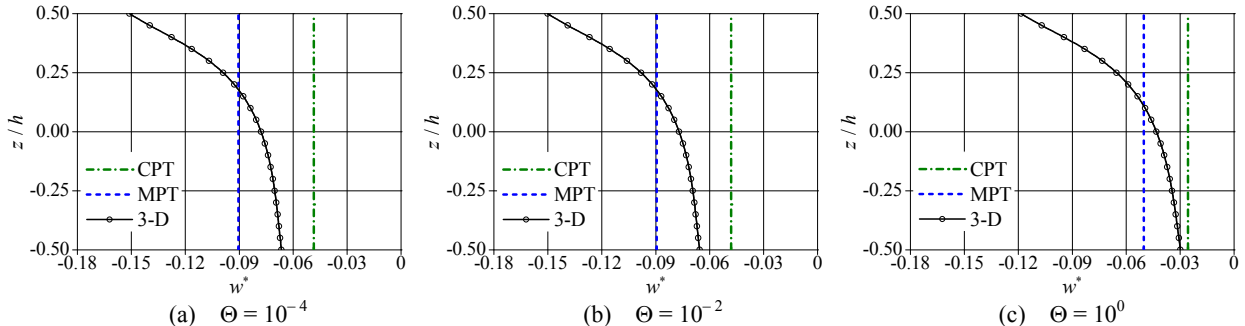


図-23 Winkler基礎上の厚板の面外変位の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/2, b/2)$

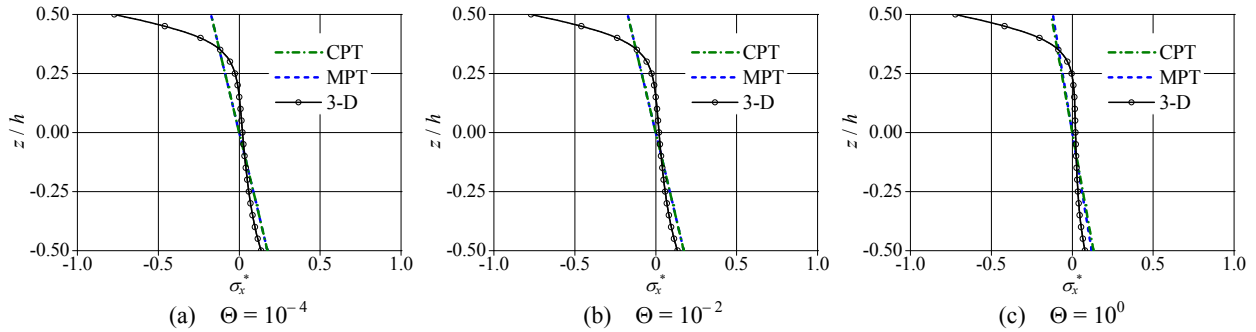


図-24 Winkler基礎上の厚板の応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/2, b/2)$

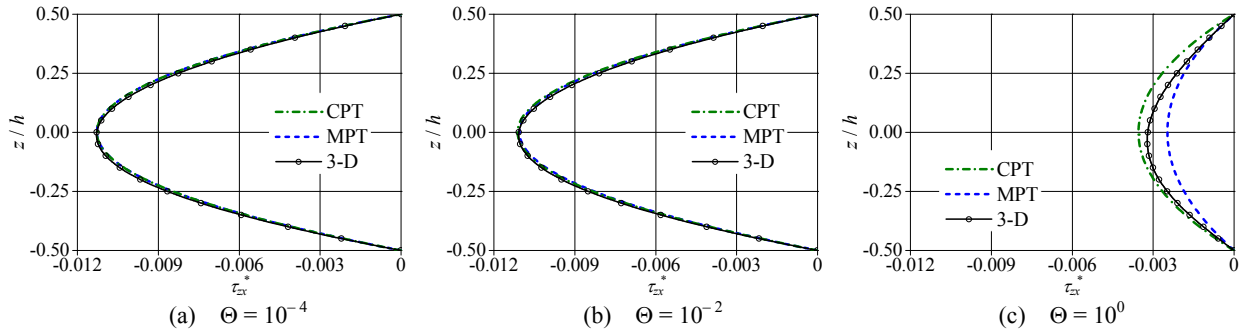


図-25 Winkler基礎上の厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/5, b/5)$

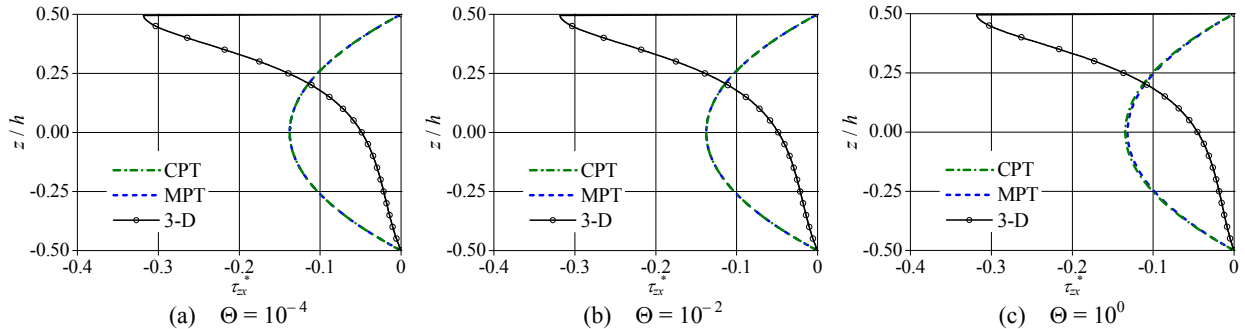


図-26 Winkler基礎上の厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (0.45a, 0.45b)$

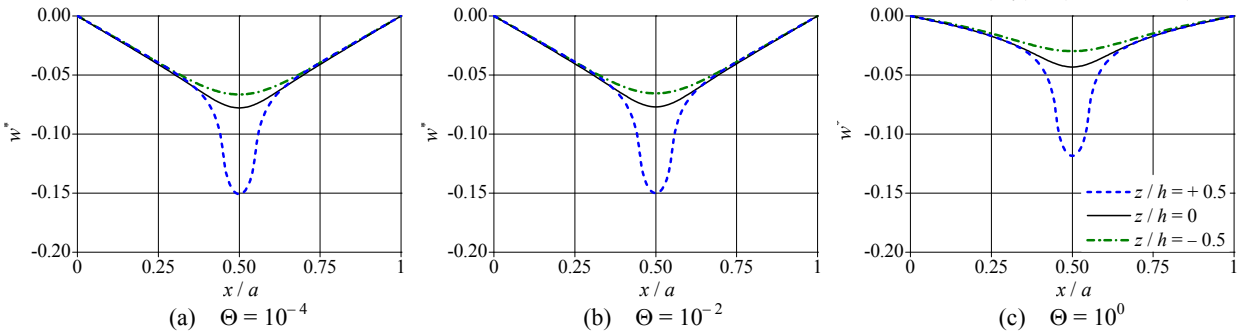


図-27 Winkler基礎上の厚板の面外変位の x 軸方向分布 : $h/a = 0.3, y = 0.5b$

位置である点 $(x, y) = (0.45a, 0.45b)$ における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布の理論比較を示したものである。また、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ である Winkler 基礎上の薄板 ($h/a = 0.01$) の $y = 0.5b$ の位置における面外変位 w^* の x 軸方向分布の理論比較を図-17 に示した。ただし、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^0$ の結果は参考として示している。

図-13 から図-16 より、古典理論と Mindlin 理論ともに無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}$ である Winkler 基礎上の薄板の面外変位 w^* の板厚方向分布は一定であり、応力 σ_x^* の板厚方向分布は板中央面 ($z = 0$) に対して逆対称な直線分布、面外せん断応力 τ_{xy}^* は板中央面 ($z = 0$) に関して対称な放物線分布である。よって、薄板は曲げ変形状態 (曲げ応力状態) であることがわかる。また、古典理論と Mindlin 理論に基づく解は、三次元弾性論による解と良い一致を示している。ここで、図-17 に着目してみると、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}$ なる Winkler 基礎上の薄板の面外変位 w^* は曲げ変形状態、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-2}$ なる Winkler 基礎上の薄板の面外変位 w^* は部分等分布荷重が作用している領域付近での局所的な曲げ変形状態であることがわかる。

図-18 から図-21 は、それぞれ、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ である Winkler 基礎上の中等厚板 ($h/a = 0.1$) の板中央点 $(x, y) = (a/2, b/2)$ における面外変位 w^* と応力 σ_x^* の板厚方向分布、点 $(x, y) = (a/5, b/5)$ の位置における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布および点 $(x, y) = (0.45a, 0.45b)$ における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布の理論比較を示したものである。また、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ である Winkler 基礎上の中等厚板 ($h/a = 0.1$) の $y = 0.5b$ の位置における面外変位 w^* の x 軸方向分布の理論比較を図-22 に示す。参考までに、図-18 から図-22 については無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^0$ の結果を、図-18 から図-21 については古典理論の結果を併記してある。

これらの結果より、無次元地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲であれば、中等厚板は曲げ変形状態であるが、部分等分布荷重 q が作用している範囲では面の位置によって面外変位 w^* の値がわずかに異なっている。また、応力 σ_x^* の板厚方向分布に着目すると、Mindlin 理論により求められる板上面で生じる最大圧縮応力 σ_x^* の値は三次元弾性論により求められるそれよりも小さい。更に、Mindlin 理論では点 $(x, y) = (0.45a, 0.45b)$ における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布を精度良く再現することができない。特に、最大面外せん断応力 τ_{xy}^* の発生位置には注意が必要であろう。

最後に、図-23 から図-26 および図-27 は、厚板 ($h/a = 0.3$) を対象として、これまでと同様の検討を行った結果である。

これより、無次元地盤反力係数 Θ の値に係らず、Mindlin 理論では、厚板の変形状態および面外変位 w^* と応力 σ_x^* の

板厚方向分布を精度良く再現できないことがわかる。

4. あとがき

本稿では、集中荷重に近い荷重状態として載荷幅を板の辺長の一割に設定した部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある周面単純支持された矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにすることを目的とし、三次元弾性論に基づく解を正解とした理論比較を行った。

本稿で得られた知見は、次の通りである。

- (1) 荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.1a \times 0.1b$ である載荷幅の小さな部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある $h/a \leq 0.01$ なる薄肉な周面単純支持された正方形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲である。
- (2) 荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.1a \times 0.1b$ である載荷幅の小さな部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある周面単純支持された正方形の板部材の曲げ問題における Mindlin 理論の適用範囲は $0.01 < h/a \leq 0.1$ かつ $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲であるが、 $h/a = 0.1$ なる中等厚板では、板上面に生じる最大圧縮応力 σ_x^* の値および部分等分布荷重の作用境界位置で生じる最大面外せん断応力 τ_{xy}^* の発生位置に注意する必要がある。

ただし、本稿で提案する古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は、今回検討した条件の下での適用範囲である。

文献5)、文献6) および本稿の結果より、板上面に作用する表面力の局所性が大きくなる、すなわち荷重載荷幅を小さくする効果は、表面力を受ける Winkler 基礎にある周面単純支持された矩形板の静的曲げ変形問題における Mindlin 理論の板厚に関する適用範囲にその影響が表れることを理論解析に基づく数値実験によって明らかにした。また、文献4)、文献5)、文献6) から本稿にわたる検討により、面外荷重を受ける Winkler 基礎にある周面単純支持された矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲の目安を提案することができた。今後は、境界条件 (支持条件) やせん断修正係数を設計変数として取り扱い、より実用性のある古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を検討していく予定である。

謝辞: 本研究の一部は、平成21年度九州建設弘済会 (現九州地域づくり協会) 研究助成事業および平成24年度豊橋技術科学大学高専連携教育研究プロジェクトによる助成を受けて行われました。ここに記して、関係各位に御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H.: Shear deformable

- beams and plates – Relationship with classical solutions, Elsevier, pp.2-7, pp.89-109, 2000.
- 2) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear flexural motion of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.18, pp.31-38, 1951.
 - 3) Timoshenko, S. and Goodier, J.N.: *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
 - 4) 志賀有人, 名木野晴暢, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆 : Winkler基礎上の矩形板の曲げ問題における三次元弾性論と板理論との比較, *土木構造・材料論文集*, 第30号, 2014 (投稿中).
 - 5) 名木野晴暢, 志賀有人, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆 : 表面力を受ける弾性基礎上の矩形板の曲げ問題における古典理論とMindlin理論の適用範囲, *土木学会論文集A2分冊 (応用力学)*, 2014 (投稿中).
 - 6) 志賀有人, 名木野晴暢, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆 : 局所的な表面力を受けるWinkler基礎上の周面単純支持矩形板の静的曲げ変形問題における三次元弾性論と板理論との比較 – 局所的な表面力の載荷幅が板の辺長の半分の場合 –, *大分工業高等専門学校 紀要 第 51号*, pp.33-44, 2014.
 - 7) Winkler, E.: *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, Prag, Dominicus, 1867.
 - 8) 名木野晴暢, 大川菜友子, 樋口理宏, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆 : 種々の面外荷重を受ける弾性基礎にある厚肉平板の三次元応力解析, *構造工学論文集*, Vol.58A, pp.26-39, 2012.

(2014.9.30 受付)