

局所的な表面力を受ける Winkler 基礎上の周面単純支持矩形板 の静的曲げ変形問題における三次元弾性論と板理論との比較

— 局所的な表面力の載荷幅が板の辺長の半分の場合 —

志賀 有人¹・名木野 晴暢²・足立 忠晴³・水澤 富作⁴・三上 隆⁵

¹ショーボンド建設株式会社, ²都市・環境工学科, ³豊橋技術科学大学, ⁴大同大学, ⁵北海道大学

本稿では局所的な表面力を受ける Winkler 基礎上の矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにすることを目的として, 三次元弾性論に基づく解を正解とした理論比較を行った. 両理論の適用範囲に影響を与える設計変数は複数あるため, 本稿では局所的な表面力の載荷幅は板の辺長の半分とし, 周面単純支持された正方形板を対象として検討を行った. また, 通常の理論比較では, 矩形板の変位や応力の面内方向または板厚方向分布を指標とする評価が一般的であるが, 本稿ではこれに加えて, ひずみエネルギーと弾性エネルギーを指標とした評価も行い, 多角的な視点から両理論の適用範囲を明らかにした.

キーワード : 矩形板, Winkler 基礎, 局所的な表面力, 古典理論, Mindlin 理論

1. まえがき

地上に建設される構造物の挙動は少なからず地盤の影響を受けるため, 建設工学の分野では地盤と構造物の静的相互作用を考慮した地盤-構造関連問題に位置付けられ, 基礎構造や舗装道路などは弾性基礎にある板部材の問題として取り扱われる¹⁾.

弾性基礎にある板部材の解析は, 三次元弾性論²⁾に基づくものと板理論³⁾⁻¹¹⁾に基づくものに大別される. 三次元弾性論に基づく板部材の解析は, 三次元弾性体としての板部材に対して境界条件が変位または応力によって厳密に規定されるため, 弾性学的に最も精確な板部材の挙動を解明することができる¹²⁾. しかし, 任意の支持条件下で基礎方程式を厳密に解くことは困難であり, また, Fourier 級数などを用いる解析的な手法¹³⁾は板部材の支持条件に制約を受ける. これに対して, 板理論は三次元弾性論の基礎方程式を板部材の挙動の本質を失わないように二次元化した近似理論であるので, 取り扱いと比較的容易かつ簡便である. ここで, 板理論は薄板理論 (古典理論)³⁾と厚板理論⁴⁾⁻¹¹⁾に大別される. Kirchhoff の仮定を基礎とする古典理論は面外せん断変形の影響を無視することができる薄肉な板部材にのみ適用が可能である. 他方, 厚板理論は古典理論で無視される面外せん断変形の効果を導入した修正理論であり, これまでも低次から高次のせん断変形理論⁴⁾⁻¹¹⁾が提案されている. 中でも変位型の一次せん断

変形理論である Mindlin 理論⁵⁾は, 古典理論に設けられている法線保持 (直線保持と直交保持) の仮定における直交保持の条件を排除し, 断面の回転角を未知量とすることで面外せん断変形の影響を考慮した厚板理論であり, 種々の厚板理論の中で最も簡易かつ簡便であると思われる. また, Lévy 法¹⁴⁾やポテンシャル関数を用いた方法¹⁵⁾によって基礎方程式を解析的に解くことが可能であるため, 古典理論と Mindlin 理論は三次元弾性論に基づく解析よりも支持条件に制約を受けない. ゆえに, 構造設計などでの実用性は十分にあると考えられる. しかし, 理論に設けられている変位場の仮定から古典理論と Mindlin 理論には適用範囲が存在するため, 構造設計を担当する技術者はこれを十分に理解しておく必要があるであろう.

本研究の目的は, Winkler 基礎¹⁶⁾上にある矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにすることである. ここで, 志賀ら¹⁷⁾は面外方向の物体力を受ける Winkler 基礎上の矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を提案している. また, 名木野ら¹⁸⁾は全面等分布荷重を受ける Winkler 基礎上の矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を提案している. これらの現状を踏まえて, 本稿では志賀ら¹⁷⁾と名木野ら¹⁸⁾と同様の方法を用いて, 局所的な表面力 (以下, 部分等分布荷重) を受ける Winkler 基礎上の矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲について検討した.

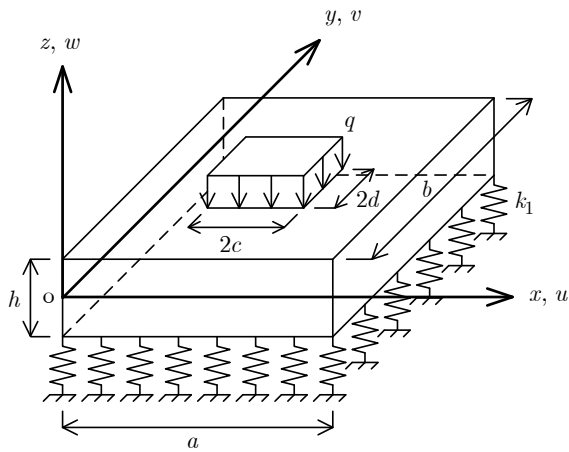


図-1 部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎上の矩形板と直交座標系

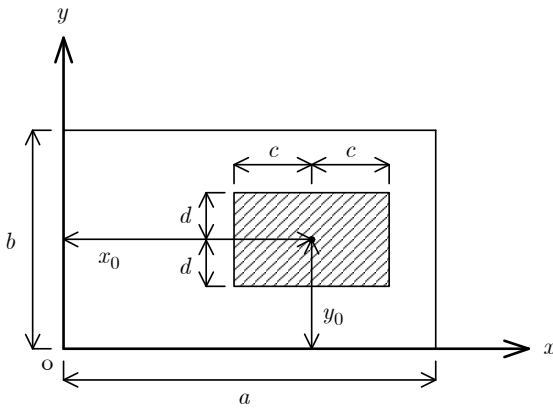


図-2 板上面に作用する局所荷重

2. 解析モデル

図-1 には、部分等分布荷重を受ける Winkler 基礎にある矩形板、直交座標系および変位方向の定義が示してある。ここで、等質・等方な矩形板は微小変形かつ線形弾性であり、その周面は単純支持されているとする。また、Winkler 基礎¹⁶⁾ は板下面で滑らかに完全密着しているものとする。なお、図-2 に示すような点 (x_0, y_0) を中心とする載荷幅 $2c \times 2d$ かつ荷重強度が q_0 である部分等分布荷重 $q(x, y)$ (以下、変数を省略して q) は板上面に作用する表面力とし、物体力 (自重) の影響は無視する。さらに、 a は板の長さ、 b は幅、 h は厚さ、 k_1 は地盤反力係数、 $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ (以下、変数を省略して u, v, w) は、それぞれ、 x, y, z 方向の変位成分であり、 u, v は面内変位、 w は面外変位を意味する。

3. 三次元弾性論に基づく支配方程式と境界条件

2章で定義した解析モデルに対応する三次元弾性論に基づく矩形板の支配方程式は、次式で与えられる¹⁸⁾⁻²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0, \quad \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = 0, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (2)$$

であり、 ∇^2 は Laplace の演算子、 e は体積ひずみ、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ は後述するひずみ成分、 G はせん断弾性係数であり、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

矩形板のひずみ成分は、次式で与えられる¹⁸⁾⁻²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

また、応力成分は、次のように与えられる¹⁸⁾⁻²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda e + 2\mu \varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu} \mu, \quad \mu = G, \quad (5)$$

であり、 λ と μ は Lamé の定数である。

矩形板の周面が単純支持されているとすれば、次の境界条件を満足しなければならない¹⁸⁾⁻²⁰⁾。

$$v = w = 0, \quad \sigma_x = 0 \quad (x = 0, a). \quad (6)$$

$$u = w = 0, \quad \sigma_y = 0 \quad (y = 0, b). \quad (7)$$

また、矩形板の上面と下面での境界条件は、次のように与えられる¹⁸⁾⁻²⁰⁾。

$$\sigma_z = -q, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (z = +h/2). \quad (8)$$

$$\sigma_z = k_1 w, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (z = -h/2). \quad (9)$$

式(6)および式(7)で与えられる板の周面の境界条件を完全に満足する変位成分 u, v, w と部分等分布荷重 q を次のように仮定する。

$$u = h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} \left(\frac{z}{h} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right),$$

$$v = h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \left(\frac{z}{h} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right),$$

$$w = h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \left(\frac{z}{h} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (10)$$

$$q = q_0 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N Q_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (11)$$

ここで、 $U_{mn}(z/h)$, $V_{mn}(z/h)$, $W_{mn}(z/h)$ は板厚方向の未知関数、 Q_{mn} は Fourier 係数、 m と n は、それぞれ、 x, y 方向の半波数、 M と N は、それぞれ、 x, y 方向の級数の打ち切り項数であり、数学的には $M \rightarrow \infty$ および $N \rightarrow \infty$ の時、正解に収束することが期待できる。

式(10)を式(1)に代入すれば、 z に関する三元連立常微分方程式を得る。これを解けば、式(1)の一般解を求めることができ、これに含まれる未定係数は式(8)および式(9)で与えられる板上面と板下面での境界条件から決定される。その詳細については、文献18)、文献19) および文献20) を参照されたい。

4. Mindlin理論に基づく支配方程式と境界条件

解析モデルに対応するMindlin理論に基づく矩形板の支配方程式は、次式で与えられる²¹⁾⁻²³⁾。

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 \phi_x + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) = 0,$$

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 \phi_y + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = 0,$$

$$\kappa Gh \left(\nabla^2 w + \frac{\Phi}{D} \right) - k_1 w = -q. \quad (12)$$

ただし、 z 軸は下向きが正であり、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Phi = D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right),$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (13)$$

である。ここで、 ∇^2 は二次元の Laplace の演算子、 Φ は Murcus moment sum、 D は板の曲げ剛性、 $\phi_x(x, y)$ は y 軸回りの回転角、 $\phi_y(x, y)$ は x 軸回りの回転角、 $w(x, y)$ は中央面 ($z=0$) での面外変位であり、 κ はせん断修正係数である。

Mindlin理論に基づけば、解析モデルに対応する境界条件は、次のように表される²¹⁾⁻²³⁾。

$$\phi_y = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, a). \quad (14)$$

$$\phi_x = 0, \quad w = 0, \quad M_y = 0 \quad (y = 0, b). \quad (15)$$

ただし、

$$M_x = \int_A \sigma_x z dA, \quad M_y = \int_A \sigma_y z dA, \quad (16)$$

であり、 $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$ は中央面での合モーメントである。

式(14)および式(15)で与えられる板の周辺の境界条件を完全に満足する回転角 ϕ_x , ϕ_y および面外変位 w を次のように仮定する¹⁴⁾。

$$\phi_x = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right),$$

$$\phi_y = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right),$$

$$w = h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (17)$$

ただし、 U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} は未定係数である。部分等分布荷重 q は式(11)と同様に仮定すればよい。

式(17)および式(11)を式(12)に代入すれば、未定係数 U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} に関する連立一次方程式を得る。これを解けば、Mindlin理論に基づく矩形板の解析解が求められる。その詳細については、紙面の都合により割愛する。

5. 古典理論に基づく支配方程式と境界条件

解析モデルに対応する古典理論に基づく矩形板の支配方程式は、次式で与えられる³⁾。

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - k_1 w = -q. \quad (18)$$

ただし、 z 軸は下向きが正である。

古典理論に基づけば、解析モデルに対応する境界条件は、次のように表される³⁾。

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, a). \quad (19)$$

$$w = 0, \quad M_y = 0 \quad (y = 0, b). \quad (20)$$

式(19)および式(20)で与えられる板の周辺の境界条件を完全に満足する面外変位 w を次のように仮定する¹⁴⁾。

$$w = a \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (21)$$

ただし、 W_{mn} は未定係数であり、部分等分布荷重 q は式

(11)と同様に仮定する.

式(21)および式(11)を式(18)に代入すれば, 未定係数 W_{mm} は容易に求められるが, この詳細についても紙面の都合により割愛する.

6. 理論解析および考察

ここでは, 三次元弾性論に基づく解を正解とし, 矩形板に蓄積されるひずみエネルギーと弾性基礎に蓄えられる弾性エネルギーおよび矩形板の変位や応力の面内方向または板厚方向分布を評価指標とした理論比較を行い, 部分等分布荷重を受けるWinkler基礎上の周面単純支持矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論とMindlin理論の適用範囲を明らかにする.

本稿では, 板厚と辺長を表す無次元量を, それぞれ, 板厚比 h/a , 辺長比 b/a と定義する. また, 薄板や厚板の厳密な定義は存在しないが, 本稿では $(0.01 \leq h/a < 0.1)$ の範囲を薄板, $(0.1 \leq h/a < 0.3)$ の範囲を中等厚板, $(0.3 \leq h/a < 0.5)$ の範囲を厚板, $(h/a \geq 0.5)$ の範囲を極厚板と呼ぶことにする. なお, 地盤反力係数を表す無次元量には, 文献17)と文献18)で用いられている次式の無次元地盤反力係数 Θ を用いる.

$$\Theta = \frac{k_1 a}{E} \quad (22)$$

ここで, 鋼材とコンクリートからなる板部材を想定すると, 無次元地盤反力係数 Θ は次の範囲の値を取る¹⁹⁾.

$$10^{-4} \leq \Theta \leq 10^{-2} \quad (23)$$

ゆえに, 実際の構造設計を念頭に置いた場合, 無次元地盤反力係数 $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲が工学的に意味を持つ. よって, 本稿では, 主にこの範囲を対象として議論するものとする.

数値計算により得られたWinkler基礎上の矩形板のひずみエネルギー成分, 弾性エネルギー成分, 変位成分および応力成分は, 次のように無次元化している.

$$U_{ij}^* = \frac{U_{ij} E}{q_0^2 a^3} \quad (i, j = x, y, z), \quad U_W^* = \frac{U_{Winkler} E}{q_0^2 a^3}. \quad (24)$$

$$w^* = \frac{w E}{q_0 a}, \quad \sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{q_0}, \quad \tau_{zx}^* = \frac{\tau_{zx}}{q_0}. \quad (25)$$

ただし,

$$U_{ii} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \varepsilon_i dz dy dx \quad (i = x, y, z),$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ij} \gamma_{ij} dz dy dx \quad (i, j = x, y, z; i \neq j),$$

$$U_{Winkler} = \frac{1}{2} k_1 \int_0^a \int_0^b (w|_{z=-h/2})^2 dy dx, \quad (26)$$

である. ここで, ひずみエネルギー成分と弾性エネルギー

成分は古典理論とMindlin理論の考え方にしたがって, U_b を曲げ変形成分, U_s を面外せん断変形成分, U_z を面外伸縮変形成分, U_W を弾性エネルギーで表すこととすれば, 次のように定義できる.

$$U_b = U_{xx}^* + U_{yy}^* + U_{xy}^*, \quad U_s = U_{yz}^* + U_{zx}^*,$$

$$U_z = U_{zz}^*, \quad U_W = U_W^*. \quad (27)$$

よって, U^* を無次元化されたWinkler基礎上の矩形板に蓄えられる全ひずみエネルギーとすれば, 次のように表すことができる.

$$U^* = U_b + U_s + U_z + U_W. \quad (28)$$

ただし, Mindlin理論では面外方向の応力 σ_z の影響を無視しているため, 全ひずみエネルギー U^* は, 次のように表される.

$$U^* = U_b + U_s + U_W. \quad (29)$$

さらに, 古典理論では応力 σ_z の影響と面外せん断変形(面外せん断ひずみ) γ_{yz}, γ_{zx} の影響を無視しているため, 全ひずみエネルギー U^* は, 次のように表される.

$$U^* = U_b + U_W. \quad (30)$$

なお, これらのひずみエネルギー成分と弾性エネルギー成分は, 各理論に基づいて導出した解析解を用い, 式(26)に基づいて厳密に積分することで求めた.

さて, 三次元弾性論(3-D)に基づく解に対する古典理論(CPT)およびMindlin理論(MPT)に基づく解の相対誤差は, 次のように算出する.

$$\text{Error}(\%) = \frac{(\text{CPT}) - (3\text{-D})}{3\text{-D}} \times 100,$$

$$\text{Error}(\%) = \frac{(\text{MPT}) - (3\text{-D})}{3\text{-D}} \times 100. \quad (31)$$

なお, 古典理論とMindlin理論に設けられている変位場の仮定による理論誤差を考慮して, 本稿では許容誤差を $\pm 10\%$ に定義した.

理論解析では, 特に断りが無い限り, 正方形の板部材 $b/a = 1$, ポアソン比 $\nu = 0.2$, せん断修正係数 $\kappa = 5/6$ を用いる. また, 板上面に作用する部分等分布荷重 q は板の中央 $(x_0, y_0) = (a/2, b/2)$ に作用するものとし, その載荷幅 $2c \times 2d$ は板の辺長 a, b の半分として $2c \times 2d = 0.5a \times 0.5b$ に設定した. なお, 全ての数値計算はFortranの四倍精度計算を実施し, 変位成分, ひずみエネルギー成分と弾性エネルギー成分の値は有効数字四桁での収束値, 応力成分の値は有効数字三桁での収束値で数値実験結果を整理した.

(1) ひずみエネルギーと弾性エネルギーを指標とした理論比較

まず, 古典理論とMindlin理論の適用範囲の目処を立て

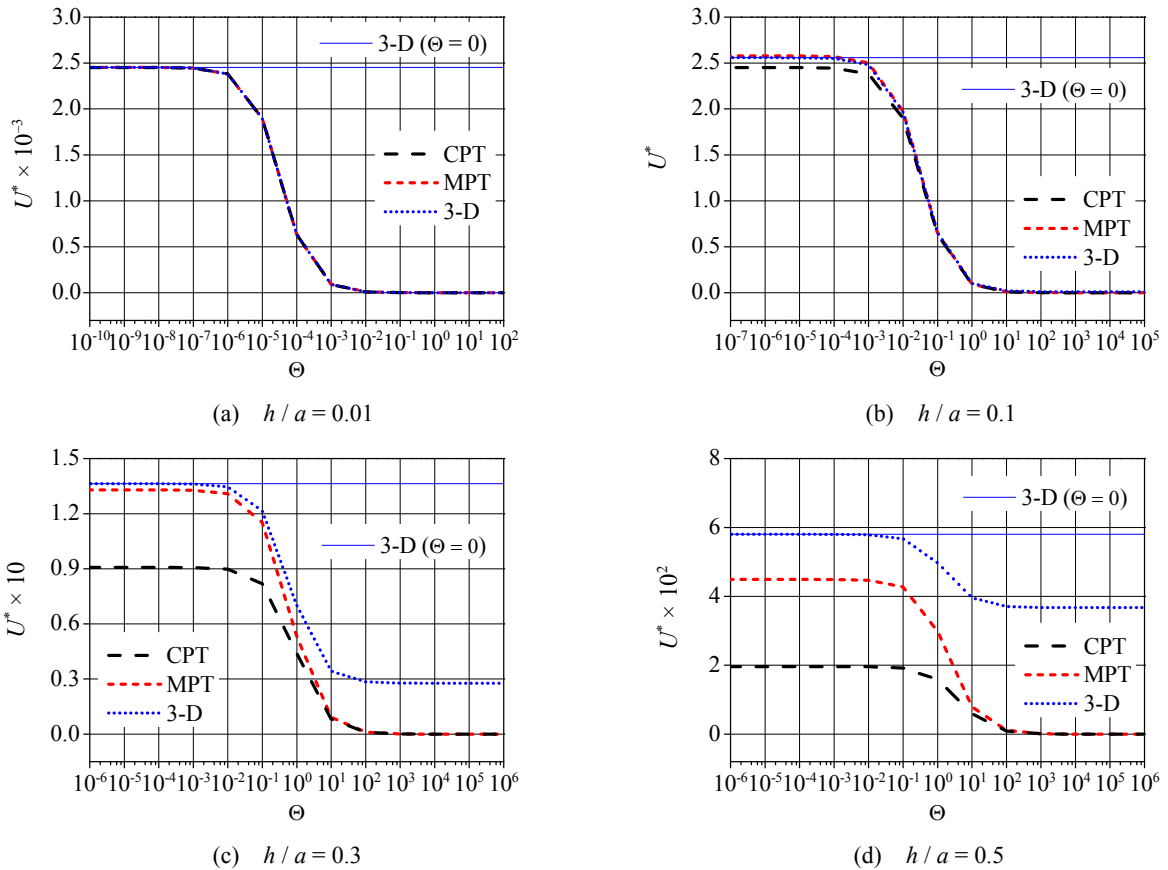


図-3 Winkler 基礎上の矩形板の全ひずみエネルギー U^* の理論比較

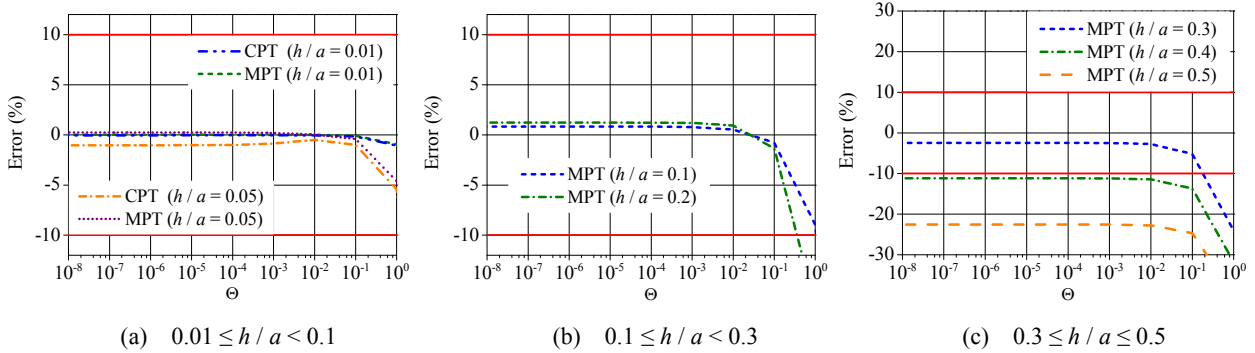


図-4 Winkler 基礎上の矩形板の全ひずみエネルギー U^* の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

るために、板部材に蓄積されるひずみエネルギーと Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギーを指標として、理論比較を行う。

図-3 は、三次元弾性論 (3-D)、Mindlin 理論 (MPT) および古典理論 (CPT) に基づいて求めた Winkler 基礎にある矩形板の全ひずみエネルギー U^* と無次元地盤反力係数 Θ および板厚比 h/a の関係を示したものである。ここで、板厚比 h/a は 0.01 (薄板)、0.1 (中等厚板)、0.3 (厚板)、0.5 (極厚板) に設定し、無次元地盤反力係数 Θ の値は 10^{-10} から 10^6 と広範囲で変化させた。また、青色の実線は、三次元弾性論に基づく Winkler 基礎に接していない矩形板 ($\Theta = 0$) の全ひずみエネルギー U^* である。次いで、Winkler 基

礎上にある矩形板の全ひずみエネルギー U^* の Mindlin 理論 (MPT) と古典理論 (CPT) との相対誤差と無次元地盤反力係数 Θ および板厚比 h/a の関係を図-4 に示す。ここで、図中の赤色の実線は許容誤差 $\pm 10\%$ を意味する。参考までに、図-5、図-6、図-7、図-8 には、それぞれ、板厚比 h/a が 0.01 (薄板)、0.1 (中等厚板)、0.3 (厚板) および 0.5 (極厚板) である矩形板の曲げ変形成分のひずみエネルギー U_b 、矩形板の面外せん断変形成分のひずみエネルギー U_s および Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギー U_w と無次元地盤反力係数 Θ の関係を、図-9、図-10、図-11 には、それぞれ、矩形板の曲げ変形成分のひずみエネルギー U_b 、矩形板の面外せん断変形成分のひずみエネルギー U_s 、

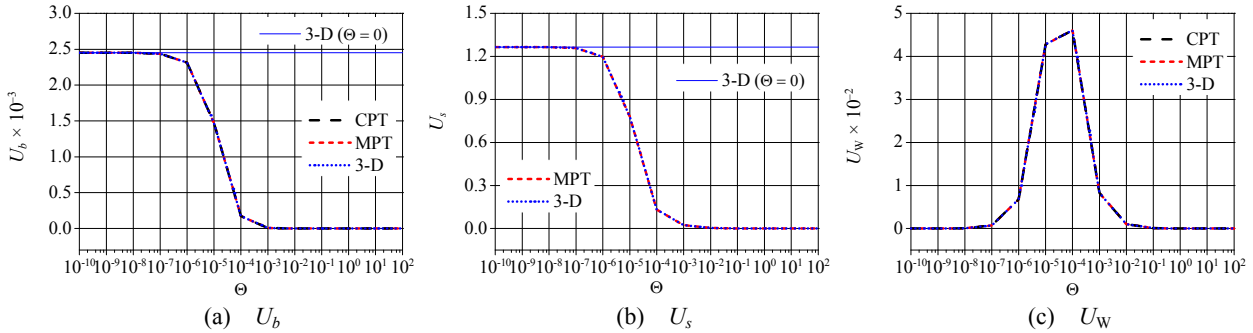


図-5 Winkler 基礎上の薄板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.01$

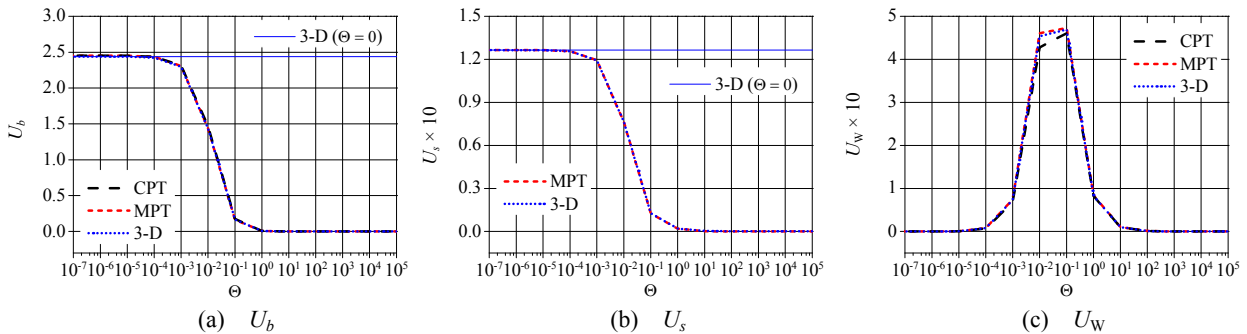


図-6 Winkler 基礎上の中等厚板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.1$

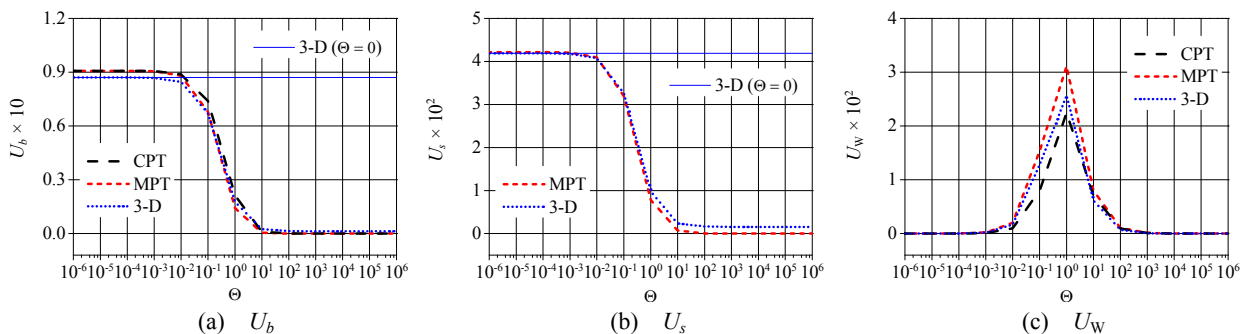


図-7 Winkler 基礎上の厚板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.3$

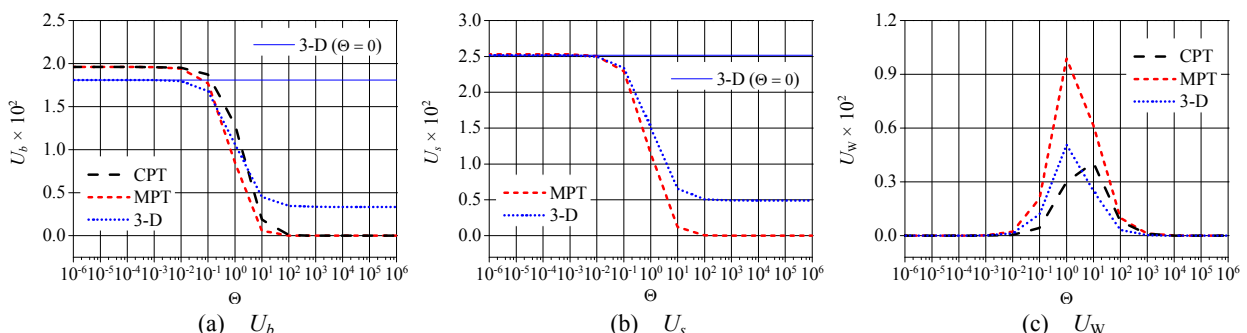


図-8 Winkler 基礎上の極厚板の各ひずみエネルギー成分の理論比較 : $h/a = 0.5$

Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギー U_w の古典理論と Mindlin 理論の相対誤差と無次元地盤反力係数 Θ および板厚比 h/a の関係を示した。

これらの結果より、板部材に蓄積されるひずみエネルギーと Winkler 基礎に蓄えられる弾性エネルギーの値を指標とし、無次元地盤反力係数 Θ が $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲を対象とすれば、古典理論は板厚比 $h/a < 0.1$ の範囲、Mindlin 理

論は板厚比 $h/a \leq 0.3$ の範囲で適用できる可能性がある。

(2) 変位と応力の面内方向または板厚方向分布を指標とした理論比較

(1)での結果を踏まえて、ここでは板部材に生じる変位や応力の面内方向または板厚方向分布を指標として、古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を詳細に検討する。

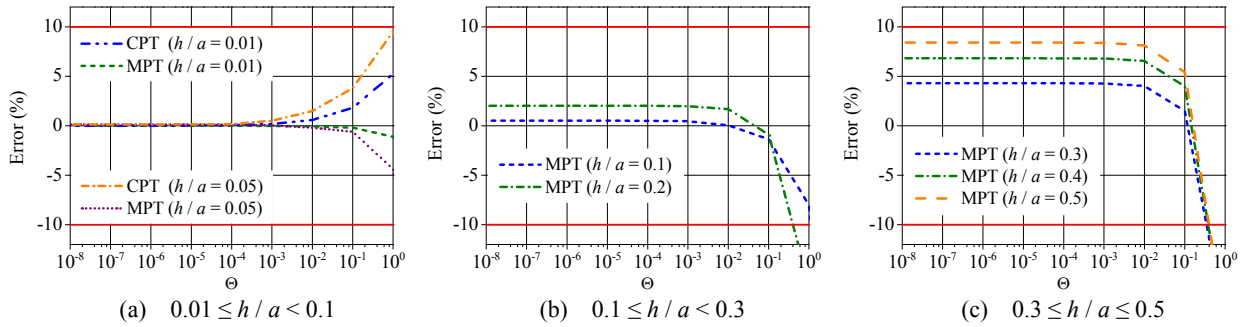


図-9 矩形板の曲げ変形成分のひずみエネルギー U_b の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

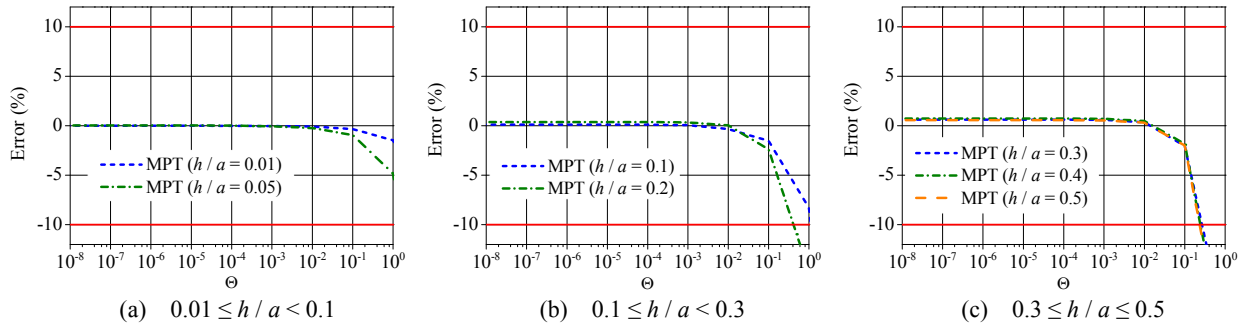


図-10 矩形板の面外せん断変形成分のひずみエネルギー U_s の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

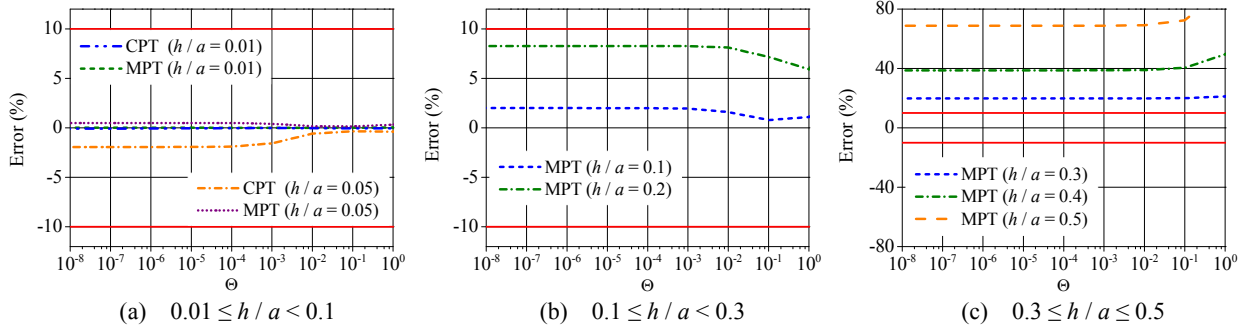


図-11 Winkler基礎に蓄えられる弾性エネルギー U_w の相対誤差と地盤反力係数および板厚の関係

図-12 から図-15 は、それぞれ、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ である Winkler 基礎上の薄板 ($h/a = 0.01$) の板中央点 $(x, y) = (a/2, b/2)$ における面外変位 w^* と応力 σ_x^* の板厚方向分布、部分等分布荷重 q が作用していない点 $(x, y) = (a/5, b/5)$ の位置における面外せん断応力 τ_{zx}^* の板厚方向分布および部分等分布荷重 q が作用している境界位置である点 $(x, y) = (a/4, b/4)$ における面外せん断応力 τ_{zx}^* の板厚方向分布の理論比較を示したものである。また、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ である Winkler 基礎上の薄板 ($h/a = 0.01$) の $y = 0.5b$ の位置における面外変位 w^* の x 軸方向分布の理論比較を図-16 に示した。ただし、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^0$ の結果は参考として示している。

図-12 から図-15 より、古典理論と Mindlin 理論ともに無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}$ である Winkler 基礎上の薄板の面外変位 w^* の板厚方向分布は一定であり、応力 σ_x^* の板厚方向分布は板中央面 ($z = 0$) に対して逆対称な直線分布、

面外せん断応力 τ_{zx}^* は板中央面 ($z = 0$) に関して対称な放物線分布である。よって、薄板は曲げ変形状態 (曲げ応力状態) であることがわかる。また、古典理論と Mindlin 理論に基づく解は、三次元弾性論による解と良く一致している。しかし、三次元弾性論に基づく地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲の薄板の面外変位 w^* の板厚方向分布は一定であるが、応力 σ_x^* は板中央面 ($z = 0$) に対して逆対称な直線分布ではなくなっている。また、地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲の点 $(x, y) = (a/5, b/5)$ の位置における面外せん断応力 τ_{zx}^* は、無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}$ の面外せん断応力 τ_{zx}^* と逆向きである。ここで、図-16 に着目してみると、無次元地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲の薄板の面外変位 w^* は単純な放物線分布 (単純な曲げ変形状態) になっておらず、古典理論と Mindlin 理論は無次元地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲の薄板の応力状態を正確に再現することができないことがわかる。

図-17 から図-20 には、それぞれ、無次元地盤反力係数

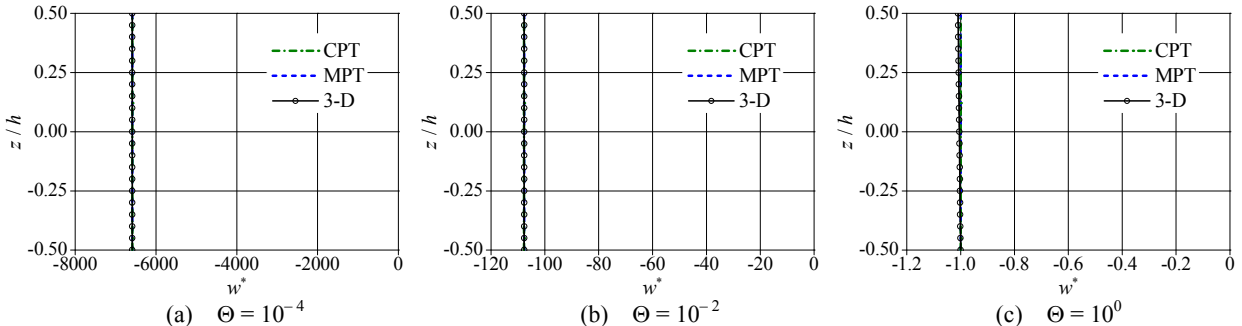


図-12 Winkler基礎上の薄板の面外変位の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/2, b/2)$

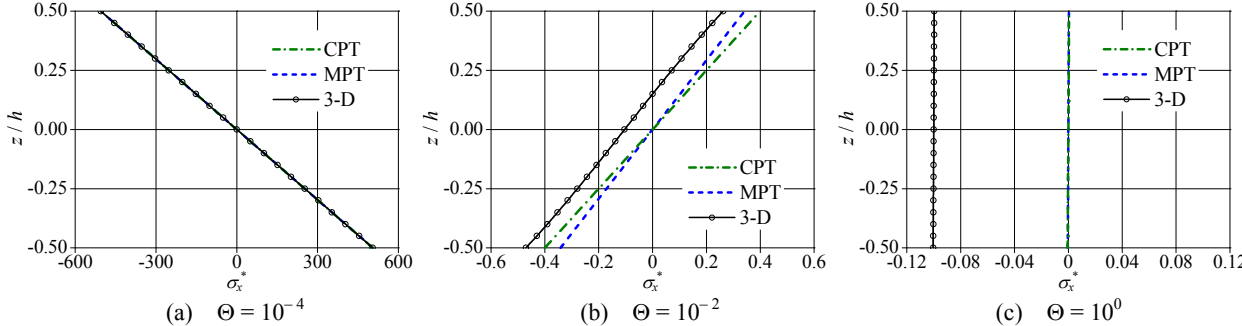


図-13 Winkler基礎上の薄板の応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/2, b/2)$

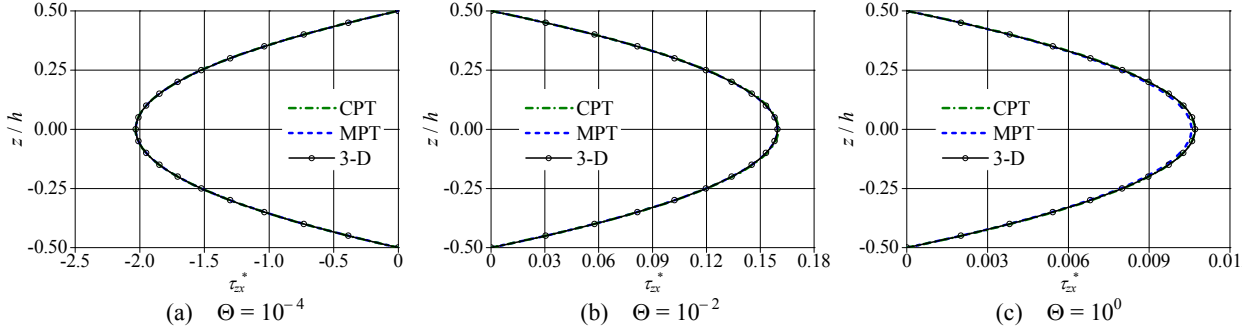


図-14 Winkler基礎上の薄板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/5, b/5)$

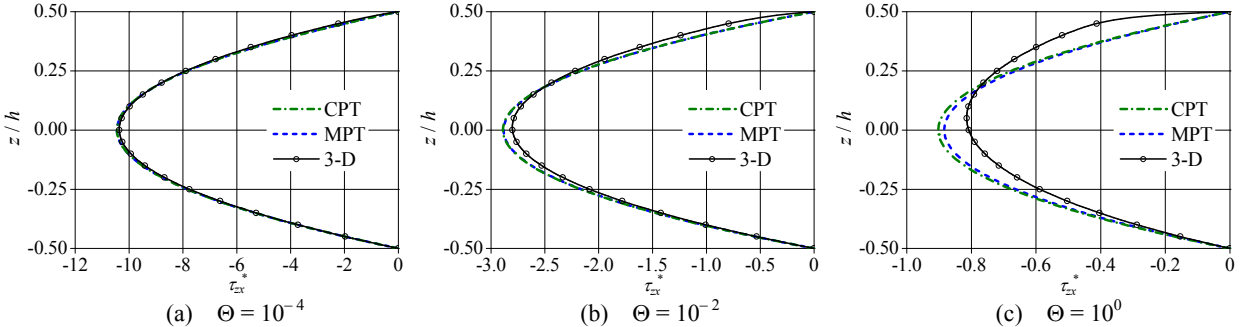


図-15 Winkler基礎上の薄板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.01, (x, y) = (a/4, b/4)$

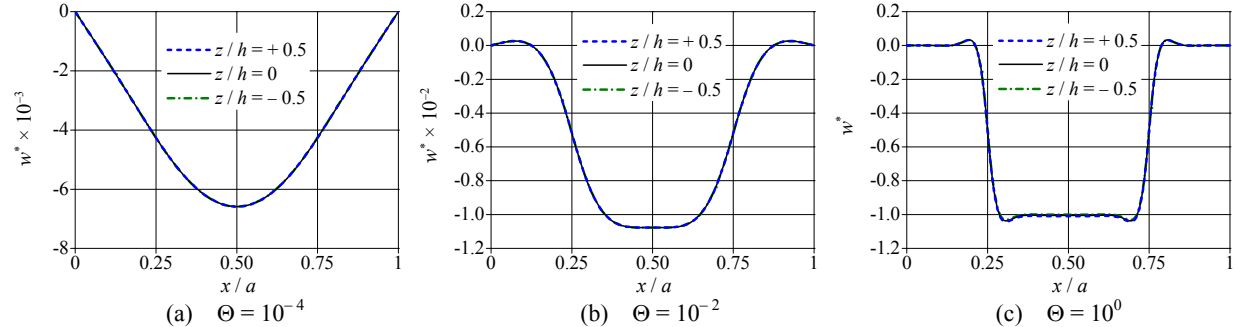


図-16 Winkler基礎上の薄板の面外変位の x 軸方向分布 : $h/a = 0.01, y = 0.5b$

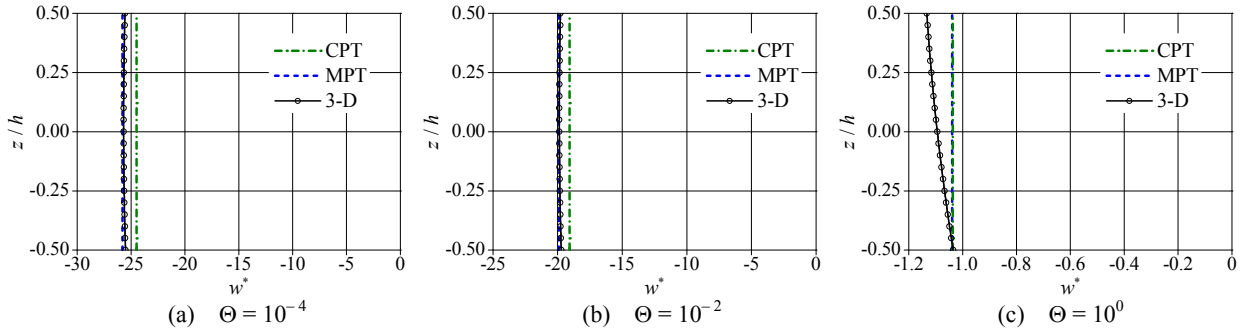


図-17 Winkler基礎上の中等厚板の面外変位の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/2, b/2)$

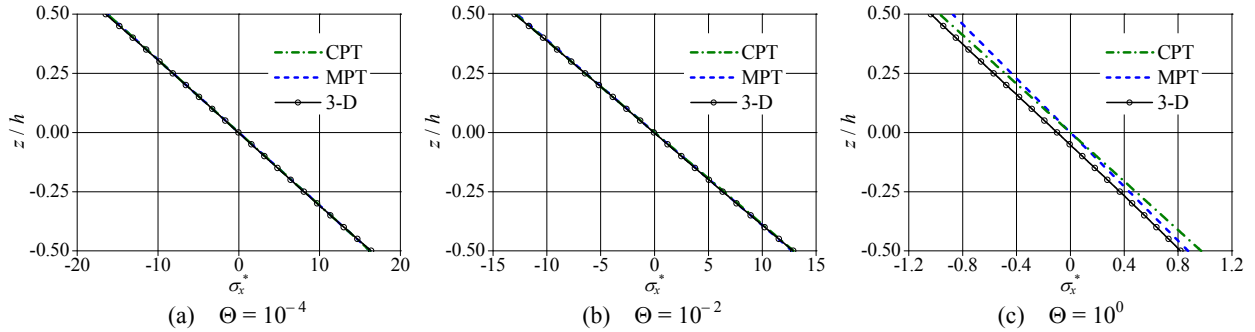


図-18 Winkler基礎上の中等厚板の応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/2, b/2)$

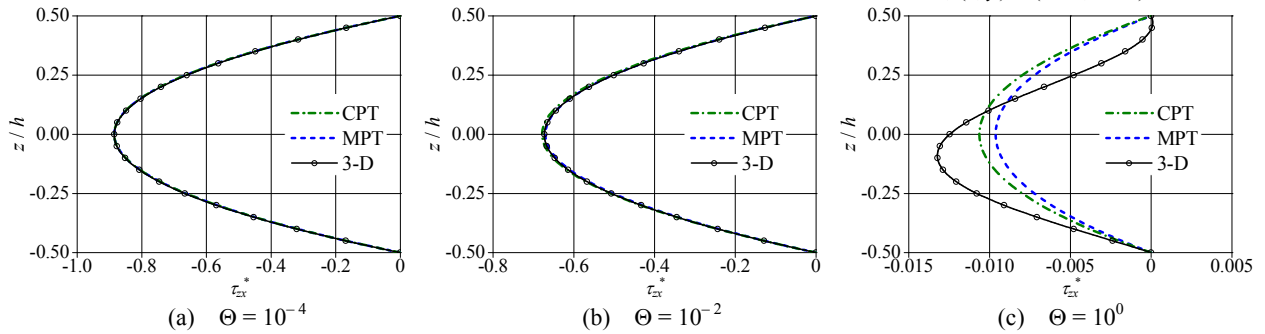


図-19 Winkler基礎上の中等厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/5, b/5)$

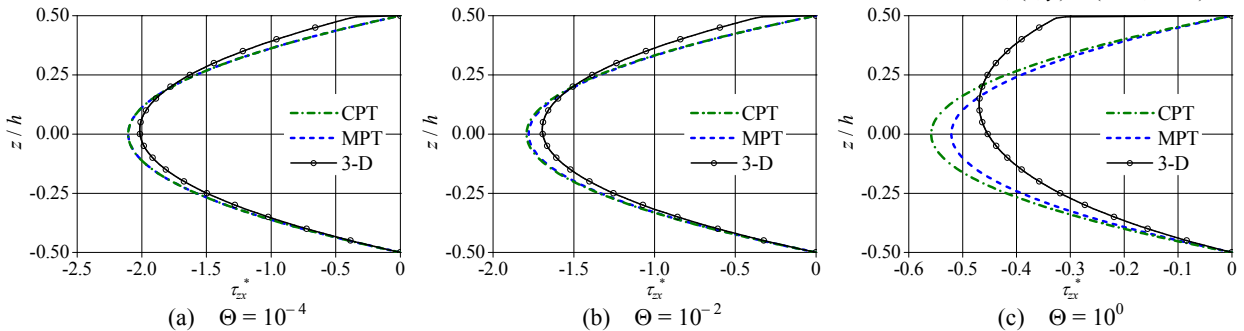


図-20 Winkler基礎上の中等厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.1, (x, y) = (a/4, b/4)$

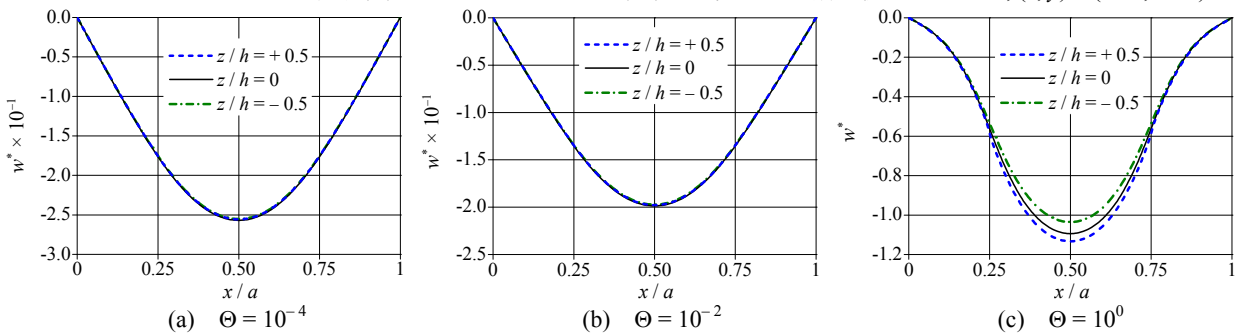


図-21 Winkler基礎上の中等厚板の面外変位のx軸方向分布 : $h/a = 0.1, y = 0.5b$

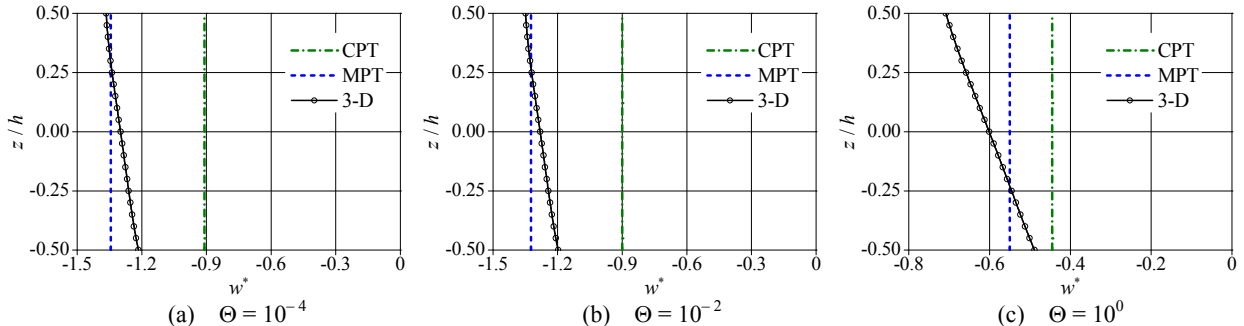


図-22 Winkler基礎上の厚板の面外変位の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/2, b/2)$

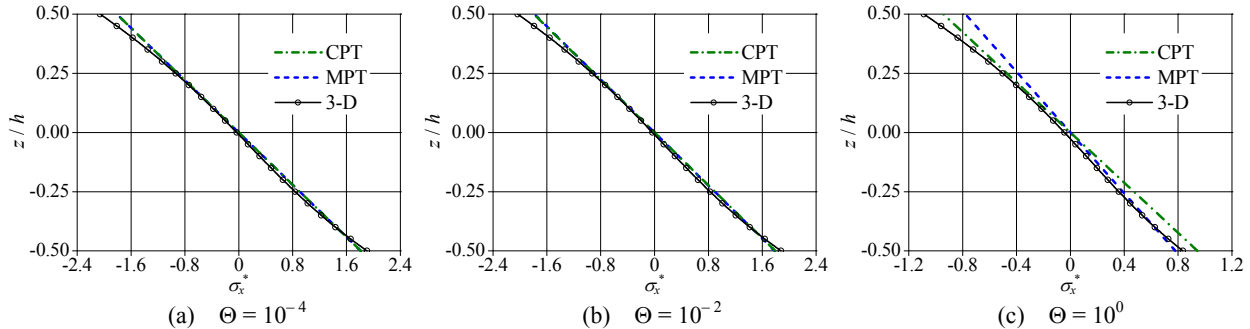


図-23 Winkler基礎上の厚板の応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/2, b/2)$

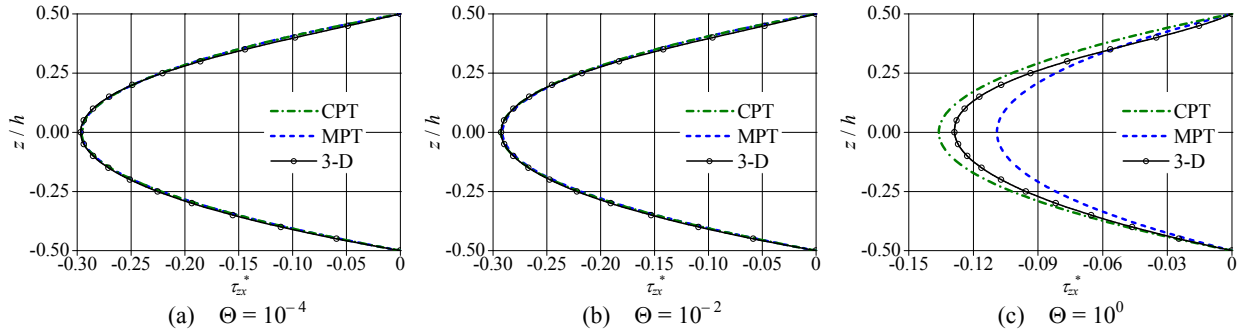


図-24 Winkler基礎上の厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/5, b/5)$

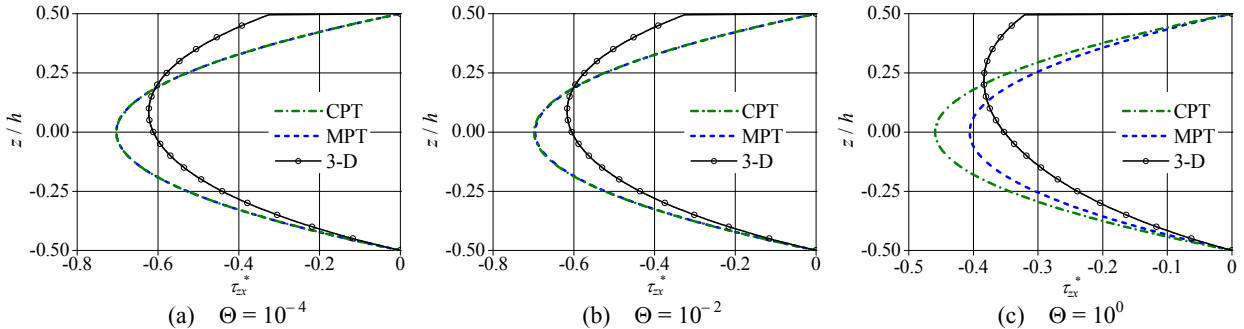


図-25 Winkler基礎上の厚板の面外せん断応力の板厚方向分布の理論比較 : $h/a = 0.3, (x, y) = (a/4, b/4)$

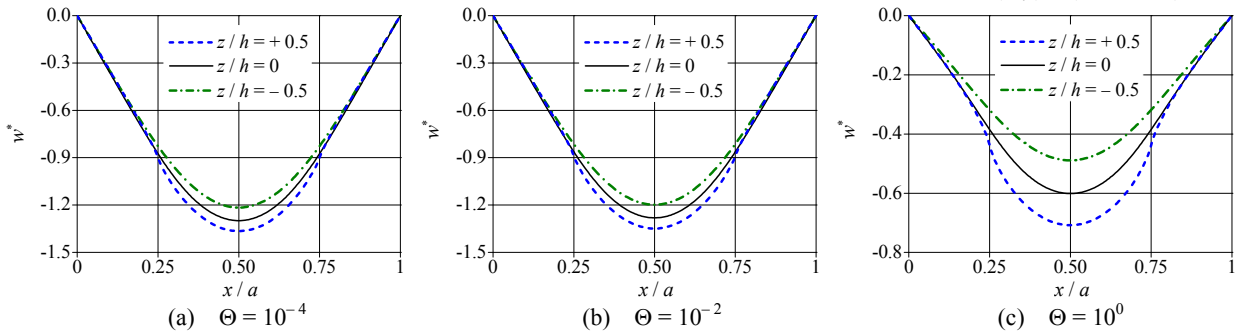


図-26 Winkler基礎上の厚板の面外変位のx軸方向分布 : $h/a = 0.3, y = 0.5b$

$\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ であるWinkler基礎上の中等厚板 ($h/a = 0.1$) の板中央点 $(x, y) = (a/2, b/2)$ における面外変位 w^* と応力 σ_x^* の板厚方向分布, 点 $(x, y) = (a/5, b/5)$ の位置における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布および点 $(x, y) = (a/4, b/4)$ における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布の理論比較を示した. また, 無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^0$ であるWinkler基礎上の中等厚板 ($h/a = 0.1$) の $y = 0.5b$ の位置における面外変位 w^* の x 軸方向分布の理論比較を図-21 に示す. 参考までに, 図-17 から図-21 については無次元地盤反力係数 $\Theta = 10^0$ の結果を, 図-17 から図-20 については古典理論の結果を併記してある.

これらの結果より, 無次元地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲であれば, Winkler基礎上にある中等厚板は単純な曲げ変形状態であり, Mindlin理論は中等厚板の応力状態を十分な精度で再現していると判断できる.

最後に, 図-22 から図-25 および図-26 は, 厚板 ($h/a = 0.3$) を対象として, これまでと同様の検討を行った結果である.

これより, 無次元地盤反力係数 $\Theta \geq 10^{-2}$ の範囲であれば, 厚板は単純な曲げ変形状態であるが, 部分等分布荷重 q が作用している範囲では面の位置によって面外変位 w^* の値が異なっている. また, 応力 σ_x^* の板厚方向分布に着目すると, Mindlin理論により求められる板上面で生じる最大圧縮応力 σ_x^* の値は三次元弾性論により求められるそれよりも小さい. 更に, Mindlin理論では点 $(x, y) = (a/4, b/4)$ における面外せん断応力 τ_{xy}^* の板厚方向分布を精度良く再現することができない.

7. あとがき

本稿では, 表面力として部分等分布荷重を受けるWinkler基礎上にある周面単純支持された矩形板の静的曲げ変形問題における古典理論とMindlin理論の適用範囲を明らかにすることを目的とし, 三次元弾性論に基づく解を正解とした理論比較を行った. また, 板部材に蓄えられるひずみエネルギーとWinkler基礎に蓄えられる弾性エネルギーを指標とする全体的・平均的な評価および板部材に生じる変位や応力の面内方向または板厚方向分布を指標する局所的な評価を組み合わせ, 多角的な視点から古典理論とMindlin理論の適用範囲を明らかにした.

本稿で得られた知見は, 次の通りである.

- (1) 荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.5a \times 0.5b$ である部分等分布荷重 q を受けるWinkler基礎上にある板厚比 $h/a \leq 0.01$ なる薄肉な周面単純支持された正方形板の静的曲げ変形問題における古典理論とMindlin理論の適用範囲は $\Theta \leq 10^{-4}$ の範囲である.
- (2) 荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.5a \times 0.5b$ である部分等分布荷重 q を受けるWinkler基礎上にある周面単純支持され

た正方形の板部材の曲げ問題におけるMindlin理論の適用範囲は $0.01 < h/a \leq 0.3$ かつ $\Theta \leq 10^{-2}$ の範囲であるが, 面外変位 w^* の板厚方向分布と板上面に生じる最大圧縮応力 σ_x^* の値には注意する必要がある.

ただし, 本稿で提案する古典理論とMindlin理論の適用範囲は, 今回検討した条件の下での適用範囲である.

謝辞: 本研究の一部は, 平成21年度九州建設弘済会 (現九州地域づくり協会) 研究助成事業および平成24年度豊橋技術科学大学高専連携教育研究プロジェクトによる助成を受けて行われました. ここに記して, 関係各位に御礼申し上げます.

参考文献

- 1) 成岡昌夫, 中村恒善: 骨組構造解析法要覧, 培風館, pp.379-398, 1976.
- 2) Timoshenko, S. and Goodier, J.N.: Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York, 1951.
- 3) Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H.: Shear deformable beams and plates – Relationship with classical solutions, Elsevier, pp.2-7, pp.89-109, 2000.
- 4) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 5) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear flexural motion of isotropic, elastic plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 6) 末武義崇, 友田富雄: 厚板解析における横荷重の影響に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.7, pp.47-56, 2004.
- 7) 末武義崇: 横荷重評価の影響を考慮した厚板の変形および応力分布解析, 応用力学論文集, Vol.10, pp.47-57, 2007.
- 8) Levinson, M.: An accurate, simple theory of the static and dynamic of elastic plates, Mechanics Research Communications Vol.7, Issue 6, pp.343-350, 1980.
- 9) Reddy, J.N.: A simple high-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 10) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.: A high order theory of plate deformation – I. Homogeneous plates, Journal of Applied Mechanics Vol.44, pp.663-668, 1977.
- 11) 松永裕之: 2次元高次理論による厚板の解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第367号, pp.48-58, 1986.
- 12) 奥村勇, 渡辺午一: 種々の境界条件を持つ長方形厚板の解析と薄板理論の適用性について, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.43-54, 1992.
- 13) Srinivas, S., Rao, A.K. and Joga Rao, C.V.: Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated

- rectangular plates, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik Vol.49, pp.449-458, 1969.
- 14) Reddy, J.N.: Theory and analysis of elastic plates and shells, second edition, CRC Press, Taylor and Francis, Boca Raton-London-New York, 2007.
 - 15) 全邦釘, Fu, G.: 厚肉斜板の曲げに関する支配方程式の導出とその解析解, 応用力学論文集, Vol.12, pp.15-25, 2009.
 - 16) Winkler, E.: Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag, Dominicus, 1867.
 - 17) 志賀有人, 名木野晴暢, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆: Winkler基礎上の矩形板の曲げ問題における三次元弾性論と板理論との比較, 土木構造・材料論文集, 第30号, 2014 (投稿中).
 - 18) 名木野晴暢, 志賀有人, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆: 表面力を受ける弾性基礎上の矩形板の曲げ問題における古典理論とMindlin理論の適用範囲, 土木学会論文集A2分冊 (応用力学), 2014 (投稿中).
 - 19) 名木野晴暢, 大川茉友子, 樋口理宏, 足立忠晴, 水澤富作, 三上隆: 種々の面外荷重を受ける弾性基礎にある厚肉平板の三次元応力解析, 構造工学論文集, Vol.58A, pp.26-39, 2012.
 - 20) 志賀有人, 名木野晴暢, 足立忠晴: 局所荷重を受ける弾性基礎上の矩形厚板の三次元弾性解析, 土木構造・材料論文集, 第29号, pp.21-32, 2013.
 - 21) Kobayashi, H. and Sonoda, K.: Rectangular Mindlin plates on elastic foundations, International Journal of Mechanical Sciences Vol.31, pp.679-692, 1989.
 - 22) Liew, K.M., Han, J.-B., Xiao, Z.M. and Du, H.: Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations, International Journal of Mechanical Sciences Vol.38, pp.405-421, 1996.
 - 23) Liu, F.-L.: Rectangular thick plates on Winkler foundation: differential quadrature element solution, International Journal of Solids and Structures Vol.37, pp.1743-1763, 2000.

(2014.9.30 受付)