ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした 構造部材の自由振動の評価について

清成 康平1·名木野 晴暢2·水澤 富作3·三上 隆4

1九州大学大学院, 2本校 都市·環境工学科, 3大同大学, 4北海道大学

構造物の自由振動特性は固有値問題を解くことで得られる固有円振動数とこれに対応する固有振動モードによって評価されるが、これらの情報のみでは構造物の自由振動における支配的な変形成分とそれらの割合などを定量的に把握することが難しい.よって、構造物の動力学的挙動を把握・解明する上で、構造物の自由振動状態を定量的に評価することができる指標の存在は重要である.本稿では、基本的な構造部材である矩形板の自由振動問題を例に取り、ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした矩形板の自由振動状態の定量的な評価について検討し、その有用性や効果性について明らかにした.

キーワード:矩形板,自由振動,ひずみエネルギー,運動エネルギー,三次元弾性論

1. まえがき

自然災害の影響を大きく受ける我が国の構造物は、地震、 台風、波浪や落石などの周波数特性を有する動的荷重を受ける。 したがって、これらの動的荷重を受ける構造物の精 確な動力学的挙動を把握することは、構造物の合理的かつ 安全な設計・維持管理に不可欠である。

構造物の動力学的挙動の把握において,基礎的な情報を提供してくれるものが固有円振動数と固有振動モードである.これらは構造物の時間依存性の運動方程式から調和振動の仮定により,時間依存性を排除した空間のみに関する連立偏微分方程式の境界値問題,いわゆる自由振動問題(固有値問題)を解くことによって得ることができる.また,固有円振動数と固有振動モードは,構造物の運動方程式の余解に相当するため,その完全解を知る上で必要不可欠なものである.

さて,何らかの離散化手法によれば,減衰の影響を無視した構造物の自由振動問題は,一般的に次式のような一般固有値問題で表される.

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\}$$
 (1)

ただし、 ω (rad / sec) は固有円振動数 (固有値)、[K] は構造物の剛性マトリックス、[M] は構造物の質量マトリックスであり、 $\{\Delta\}$ は固有円振動数 ω に対応する固有振動モード(固有ベクトル)である。この式(1)を解けば、構造物の固有円振動数 ω (rad / sec)、固有周期T (sec)、固有振動数f (Hz) とこれらに対応する固有振動モードが求められる。しかし、固有円振動数と固有振動モードの情報のみでは、構造物の

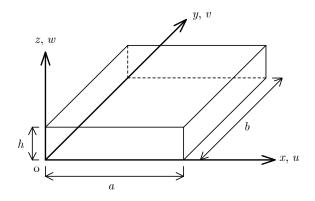


図-1 矩形板と直交座標系

自由振動における支配的な変形成分やその割合などの振動状態を把握することが難しい.したがって,構造物の自由振動状態を定量的に評価できる指標の存在は重要であり,これは構造物の自由振動特性および動力学的挙動の把握・理解の手助けになるであろう.

本稿では、基本的な構造部材である矩形板の自由振動問題を例に取り、ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした矩形板の自由振動状態の定量的な評価について検討し、その有用性や効果性について明らかにした.

2. 解析モデル

(1) 解析モデルと解析仮定

図-1 に,矩形板,直交座標系および変位方向の定義を示す.ここで, *a* は矩形板の長さ, *b* は幅であり, *h* は板

厚である. また、矩形板の下面 (z = 0) および上面 (z = h) は自由面とする. なお、x, y, z 方向の時間依存性の変位成分は時間変数を t として、それぞれ、u(x, y, z, t)、v(x, y, z, t)、w(x, y, z, t) (以下、u(x, y, w) で表す.

等質・等方な材料からなる矩形板は微小変形かつ線形弾性であるとし、三次元弾性論に基づいて解析する.また、その運動は調和振動を仮定する.

(2) 基礎方程式と境界条件

三次元弾性論に基づく矩形板の運動方程式は, 次のように表される ¹⁾.

$$\nabla^{2}u + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}, \quad \nabla^{2}v + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^{2}v}{\partial t^{2}},$$

$$\nabla^{2}w + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^{2}w}{\partial t^{2}}.$$
(2)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$
(3)

であり、 ∇^2 は Laplace の演算子,e は体積ひずみ, ε_x , ε_y , ε_z は後述するひずみ成分,G はせん断弾性係数,E は縦弾性係数, ν はポアソン比であり, ρ は密度である.

三次元弾性論に基づく矩形板のひずみ成分は、次式のように表される 1).

$$\begin{split} \varepsilon_{x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \,, \quad \varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y} \,, \quad \varepsilon_{z} = \frac{\partial w}{\partial z} \,, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \,, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \,, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \,. \end{split} \tag{4}$$

また、応力成分は、次式のように表される1).

$$\sigma_{\scriptscriptstyle x} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\scriptscriptstyle x}\,, \ \, \sigma_{\scriptscriptstyle y} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\scriptscriptstyle y}\,, \ \, \sigma_{\scriptscriptstyle z} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\scriptscriptstyle z}\,,$$

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}. \tag{5}$$

ここで

$$\lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \mu \; , \quad \mu = G \; , \tag{6}$$

であり、 $\lambda と \mu$ は Lamé の定数である.

調和振動する矩形板の変位成分 u, v, w は、振幅変位 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} を用いて、次のように表すことができる.

$$u(x,y,z,t) = \overline{u}(x,y,z)e^{-i\omega t}, \quad v(x,y,z,t) = \overline{v}(x,y,z)e^{-i\omega t},$$

$$w(x, y, z, t) = \overline{w}(x, y, z)e^{-i\omega t}.$$
(7)

ただし、 ω は固有円振動数であり、 $i^2 = -1$ は虚数単位である. よって、式(7)を式(2)に代入すれば、時間依存性を排除した空間のみに関する基礎方程式が得られる.

$$\nabla^2 \overline{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \overline{e}}{\partial x} + \frac{\rho \omega^2}{G} \overline{u} = 0,$$

$$\nabla^2 \overline{v} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \overline{e}}{\partial y} + \frac{\rho \omega^2}{G} \overline{v} = 0 ,$$

$$\nabla^2 \overline{w} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \overline{e}}{\partial z} + \frac{\rho \omega^2}{G} \overline{w} = 0 .$$
(8)

ここで

$$\overline{e} = \overline{\varepsilon}_x + \overline{\varepsilon}_y + \overline{\varepsilon}_z, \tag{9}$$

であり、 \bar{e} は時間依存性を排除した体積ひずみである. なお、時間依存性を排除したひずみ成分および応力成分は、それぞれ、次のように表される.

$$\overline{\varepsilon}_{x} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}, \quad \overline{\varepsilon}_{y} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}, \quad \overline{\varepsilon}_{z} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}, \quad \overline{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}, \\
\overline{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial y}, \quad \overline{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}.$$
(10)

$$\overline{\sigma}_{{\scriptscriptstyle x}} = \lambda \overline{e} + 2 \mu \overline{\varepsilon}_{{\scriptscriptstyle x}} \,, \ \, \overline{\sigma}_{{\scriptscriptstyle y}} = \lambda \overline{e} + 2 \mu \overline{\varepsilon}_{{\scriptscriptstyle y}} \,, \ \, \overline{\sigma}_{{\scriptscriptstyle z}} = \lambda \overline{e} + 2 \mu \overline{\varepsilon}_{{\scriptscriptstyle z}} \,,$$

$$\overline{\tau}_{xy} = \mu \overline{\gamma}_{xy}, \ \overline{\tau}_{yz} = \mu \overline{\gamma}_{yz}, \ \overline{\tau}_{zx} = \mu \overline{\gamma}_{zx}.$$
 (11)

矩形板の周面 (x = 0, a および y = 0, b) における境界条件は、次のように定義される.

(a) 単純支持面

$$\overline{v} = \overline{w} = 0, \, \overline{\sigma}_x = 0 \qquad (x = 0, a),$$

$$\overline{u} = \overline{w} = 0, \, \overline{\sigma}_y = 0 \qquad (y = 0, b). \tag{12}$$

(b) 固定面

$$\overline{u} = \overline{v} = \overline{w} = 0$$
 $(x = 0, a),$ $\overline{u} = \overline{v} = \overline{w} = 0$ $(y = 0, b).$ (13)

(c) 自由面

$$\overline{\sigma}_x = \overline{\tau}_{xy} = \overline{\tau}_{zx} = 0$$
 $(x = 0, a),$
$$\overline{\sigma}_y = \overline{\tau}_{xy} = \overline{\tau}_{yz} = 0$$
 $(y = 0, b).$ (14)

よって、式(8)で表される基礎方程式を式(12)、式(13)および式(14)で与えられる境界条件の下で解けば、固有円振動数 ω とこれに対応する固有振動モード (振幅変位 \overline{u} , \overline{v} , \overline{w})が求められる.

3. エネルギー解析

ここでは、ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした矩形板の自由振動状態の評価方法について述べる.

矩形板のひずみエネルギーUは、次のように与えられる.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{V} \left(\sigma_{x} \varepsilon_{x} + \sigma_{y} \varepsilon_{y} + \sigma_{z} \varepsilon_{z} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dV.$$

(15)

ただし、V は体積を意味する. また、矩形板の運動エネルギーT は、次のように与えられる.

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_{V} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^{2} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^{2} \right\} dV.$$
 (16)

ここで、式(7)を式(15)と式(16)に代入すれば、時間依存性を排除した最大ひずみエネルギー U_{\max} と最大運動エネルギー T_{\max} は、それぞれ、次のように表される.

$$\begin{split} U_{\text{max}} &= \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{h} \left(\overline{\sigma}_{x} \overline{\varepsilon}_{x} + \overline{\sigma}_{y} \overline{\varepsilon}_{y} + \overline{\sigma}_{z} \overline{\varepsilon}_{z} + \overline{\tau}_{xy} \overline{\gamma}_{xy} + \overline{\tau}_{yz} \overline{\gamma}_{yz} \right. \\ &+ \overline{\tau}_{zx} \overline{\gamma}_{zy} \right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, . \end{split}$$

$$T_{\text{max}} = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h (\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2) \, dz \, dy \, dx \,. \tag{18}$$

$$U_{ii} = \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{h} \overline{\sigma}_{i} \overline{\varepsilon}_{i} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \quad (i = x, y, z) \,,$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{h} \overline{\tau}_{ij} \overline{\gamma}_{ij} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \quad (i, j = x, y, z; i \neq j) \,,$$

$$T_{UU} = \frac{\rho \omega^{2}}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{h} \overline{u}^{2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \,,$$

$$T_{VV} = \frac{\rho \omega^{2}}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{h} \overline{v}^{2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \,,$$

$$T_{WW} = \frac{\rho \omega^{2}}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{h} \overline{w}^{2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \,,$$

$$(19)$$

と置けば、次のように表すことができる.

$$U_{\text{max}} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{xy} + U_{yz} + U_{zz}. \tag{20}$$

$$T_{\text{max}} = T_{UU} + T_{VV} + T_{WW} . {21}$$

例として矩形板の曲げ振動を対象とすれば、 U_{xx} 、 U_{yy} , U_{xy} は曲げ変形、 U_{zz} は面外伸縮変形、 U_{yz} , U_{zx} は面外せん断変形に関するひずみエネルギーを意味し、これらの値は矩形板の自由振動状態におけるそれぞれの変形成分の割合を表していると解釈できる。同様に考えれば、 T_{UU} , T_{VV} は面

内変位、 T_{WW} は面外変位に関する運動エネルギーを意味し、これらの値は矩形板の自由振動状態における面内慣性と面外慣性の影響の割合を表していると解釈できよう。これより、各ひずみエネルギー成分や各運動エネルギー成分の値を比較したり、値の変化を調べたりすることで、矩形板の自由振動状態を定量的に評価することができる。なお、式(19)で定義される各ひずみエネルギー成分および各運動エネルギー成分の値の計算には、Gauss-Legendreの数値積分を用いた。

式(19)から明らかなように、矩形板の各ひずみエネルギー成分および各運動エネルギー成分の値を求めるためには、矩形板の固有円振動数とこれに対応する固有振動モードが既知でなければならない。これらは、式(8)で表される基礎方程式を式(12)、式(13)および式(14)で与えられる境界条件の下で解くことで得られるが、任意の支持条件を有する矩形板では厳密解を得ることが困難になり、また解析解は支持条件に制限を受ける。そこで、本稿では、任意の支持条件を有する矩形板の自由振動問題をB-spline Ritz法により解析することとした。これによれば、任意の支持条件を有する薄板から厚板までの低次から高次までの固有円振動数と固有振動モードを高い解析精度で求めることが可能である。B-spline Ritz法による矩形板の自由振動問題の解析については、文献2)を参考にされたい。

4. 数値計算例および考察

ここでは、ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標と した矩形板の自由振動状態の定量的な評価について検討 し、その有用性や効果性を明らかにする.

本稿では、板厚と辺長を表す無次元量を、それぞれ、板厚比h/a、辺長比b/aと定義し、固有円振動数は次式の振動数パラメータ Ω として表す.

$$\Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{22}$$

表-1 周面単純支持矩形薄板の基本振動の振動数パラメータと各エネルギー成分の収束性および精度比較

(17)

h/a	$m_{\xi} \times m_{\eta} \times m_{\zeta}$	Ω_{1st}	U_{xx}	U_{yy}	U_{xy}	T_{WW}
0.001	11 × 11 × 5	5.974×10^{-3}	3.250×10^{-1}	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	1.000
	$13 \times 13 \times 5$	5.973×10^{-3}	3.250×10^{-1}	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	1.000
	$15 \times 15 \times 5$	5.973×10^{-3}	3.250×10^{-1}	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	1.000
	$17 \times 17 \times 5$	5.973×10^{-3}	3.250×10^{-1}	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	1.000
	CPT	5.973×10^{-3}	3.250×10^{-1}	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	1.000
0.01	11 × 11 × 5	5.971×10^{-2}	3.248×10^{-1}	3.248×10^{-1}	3.498×10^{-1}	1.000
	$13 \times 13 \times 5$	5.971×10^{-2}	3.248×10^{-1}	3.248×10^{-1}	3.498×10^{-1}	1.000
	$15 \times 15 \times 5$	5.971×10^{-2}	3.248×10^{-1}	3.248×10^{-1}	3.498×10^{-1}	1.000
	$17 \times 17 \times 5$	5.971×10^{-2}	3.248×10^{-1}	3.248×10^{-1}	3.498×10^{-1}	1.000
	CPT	5.973×10^{-2}	3.250×10^{-1}	3.250×10^{-1}	3.500×10^{-1}	1.000

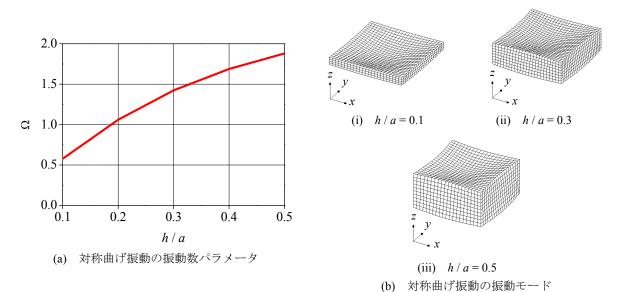


図-2 周面単純支持矩形板の対称曲げ振動の振動数パラメータと振動モードに与える板厚比の影響

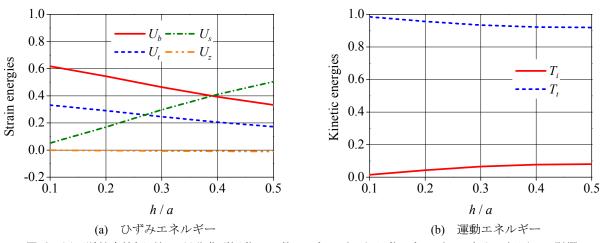


図-3 周面単純支持矩形板の対称曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比の影響

数値計算には personal computer (Windows 7 Professional 64 bit) を用い,Fortran (インテル® Visual Fortran Composer XE, インテル® Math Kernel Library) の倍精度計算で行った.また,振動数パラメータ Ω ,各ひずみエネルギー成分 および各運動エネルギー成分の値は有効数字四桁で整理した.なお,数値計算例では,特に断りがない限り,正方形板 (b/a=1) とし,ポアソン比v=0.3 を用い, ξ , η , ζ 方向の spline 次数 $(k_{\xi}-1)\times(k_{\eta}-1)\times(k_{\zeta}-1)$ は,応力–ひずみ 場までが連続なることを考慮し,また,文献 2) を参考にして,板厚比 $h/a \le 0.05$ である薄板の問題では spline 次数 $(k_{\xi}-1)\times(k_{\eta}-1)\times(k_{\zeta}-1)=4\times4\times2$,板厚比 h/a>0.05 である中等厚板から厚板の問題では spline 次数 $(k_{\xi}-1)\times(k_{\eta}-1)\times(k_{\zeta}-1)=4\times4\times3$ に設定した.

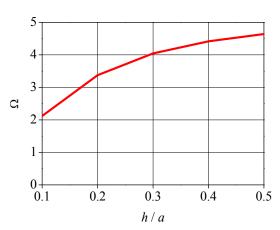
(1) 数値解の収束性および妥当性

表-1 には、周面単純支持矩形薄板の基本振動 (最低次) の振動数パラメータ $\Omega_{\rm lst}$, ひずみエネルギー成分および運

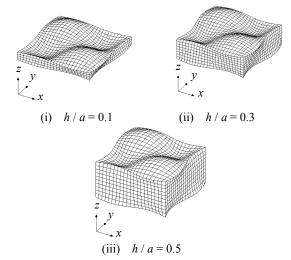
表-2 周面単純支持矩形板の対称曲げ振動状態

$\frac{h}{a}$	$\frac{U_{s}}{U_{b}+U_{t}}$	$\frac{U_z}{U_b + U_t}$	$rac{T_i}{T_t}$
0.1	5.470×10^{-2}	-1.359×10^{-3}	1.481×10^{-2}
0.2	2.032×10^{-1}	-4.937×10^{-3}	4.501×10^{-2}
0.3	4.189×10^{-1}	-9.751×10^{-3}	7.028×10^{-2}
0.4	6.859×10^{-1}	-1.497×10^{-2}	8.378×10^{-2}
0.5	9.980×10^{-1}	-1.986×10^{-2}	8.741×10^{-2}

動エネルギー成分の収束性と精度比較が示してある。ここで,板厚はh/a=0.001,0.01 に設定した。また,板厚方向の区分点の数 m_{ζ} は5 に固定し,面内方向の区分点の数 m_{ξ} × m_{η} を11×11から17×17まで変化させて,数値解の収束状態を調べた。さらに,数値解の妥当性を確認するために,周辺単純支持の条件を満足する固有関数を仮定し,古典薄板理論 (CPT) 31,41 の時間依存性を排除した空間のみに関する基礎方程式を解析的に解いて求めた振動数パラメ



(a) 逆対称曲げ振動の振動数パラメータ



(b) 逆対称曲げ振動の振動モード

図-4 周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動の振動数パラメータと振動モードに与える板厚比の影響

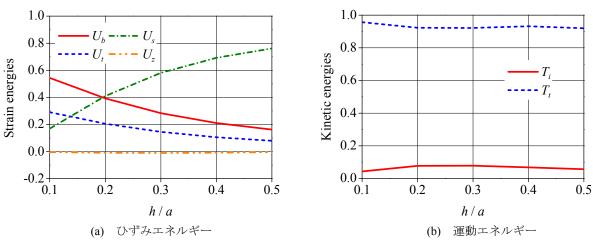


図-5 周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比の影響

ータ Ω_{lst} , ひずみエネルギー成分 U_{xx} , U_{yy} , U_{xy} および運動エネルギー成分 T_{ww} の値も併記してある.

これより、B-spline Ritz 法により求めた数値解は、面内方向の区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta}$ の増大にともなって一定の値に収束し、有効数字四桁での収束値を得る。また、その収束値は古典薄板理論 $^{3),4}$ に基づく解析解と良い一致を示している。さらに、基本振動以外の振動次数、異なる板厚比h/a や支持条件でも検討を行っているが、同様の結果を得ている.加えて、全ての数値計算において、常に $U_{\max} = T_{\max}$ の関係を満足していることを確認している.

以上の結果から、B-spline Ritz 法による数値解の妥当性は十分にあり、また、エネルギー成分に対しても高い解析精度を有していると判断できよう.

(2) ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした種々の支持条件を有する矩形板の自由振動の評価

ここでは、ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした矩形板の自由振動状態の評価について検討する.まず、

表-3 周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動状態

$\frac{h}{a}$	$\frac{U_s}{U_b + U_t}$	$\frac{U_z}{U_b + U_t}$	$rac{T_i}{T_t}$
0.1	2.032×10^{-1}	-4.937×10^{-3}	4.501×10^{-2}
0.2	6.859×10^{-1}	-1.497×10^{-2}	8.378×10^{-2}
0.3	1.354	-2.381×10^{-2}	8.493×10^{-2}
0.4	2.186	-2.588×10^{-2}	7.270×10^{-2}
0.5	3.144	-1.482×10^{-2}	6.145×10^{-2}

式(19)で定義した矩形板のひずみエネルギー成分と運動エネルギー成分を次のように置いて評価する.

$$U_{b} = U_{xx} + U_{yy}$$
 , $U_{t} = U_{xy}$,

$$U_s = U_{yz} + U_{zx}, \ U_z = U_{zz}.$$
 (23)

$$T_i = T_{III} + T_{VV}, T_t = T_{WW}.$$
 (24)

ただし、 U_b は曲げ変形成分または面内伸縮変形成分、 U_t

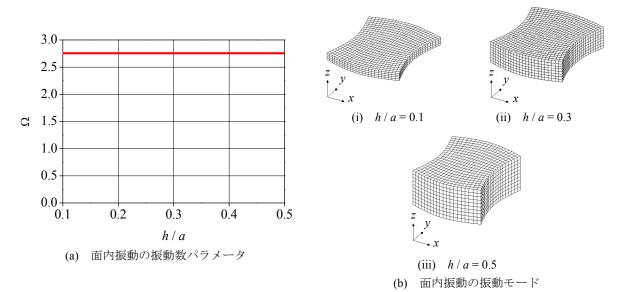


図-6 周面単純支持矩形板の面内振動の振動数パラメータと振動モードに与える板厚比の影響

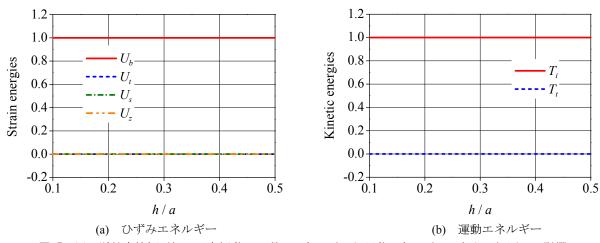


図-7 周面単純支持矩形板の面内振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比の影響

は面内せん断変形成分 (曲げ変形成分またはねじれ変形成分), U_s は面外せん断変形成分, U_z は面外伸縮変形成分, T_i は面内慣性成分, T_i は面外慣性成分を意味する. これより, 矩形板の最大ひずみエネルギー U_{\max} と最大運動エネルギー T_{\max} には, 次の関係式が成立する.

$$U_{\text{max}} = U_b + U_t + U_s + U_z \,. \tag{25}$$

$$T_{\text{max}} = T_i + T_t \,. \tag{26}$$

本稿では $U_{\text{max}} = T_{\text{max}} = 1$ になるようにエネルギーの値を正規化した. したがって, U_b , U_t , U_s , U_z のそれぞれの値は最大ひずみエネルギー $U_{\text{max}} = 1$ (自由振動による変形全体) に対するそれぞれの変形成分の割合を, T_i , T_i のそれぞれの値は最大運動エネルギー $T_{\text{max}} = 1$ (自由振動による慣性全体) に対するそれぞれの慣性成分の割合を定量的に表している.

図-2 は、周面単純支持矩形板の対称曲げ振動の振動数

表-4 周面単純支持矩形板の面内振動状態

$\frac{h}{a}$	$\frac{U_s}{U_b + U_t}$	$\frac{U_z}{U_b + U_t}$	$\frac{T_i}{T_t}$
0.1	0.000	0.000	∞
0.2	0.000	0.000	∞
0.3	0.000	0.000	∞
0.4	0.000	0.000	∞
0.5	0.000	0.000	∞

パラメータ Ω とその振動モードに与える板厚比 h/a の影響を示したものである. ここで、板厚比 h/a は 0.1 (中等厚板) から 0.5 (厚板) まで変化させた.

これより、周面単純支持矩形板の対称曲げ振動の振動数パラメータ Ω は、板厚の増大にともなって曲線的に増加する。また、振動モードに着目すると、板厚の増大にともなって断面の歪みが認められる。これらの原因は、板厚が大きくなることによる面外せん断変形の影響であることは

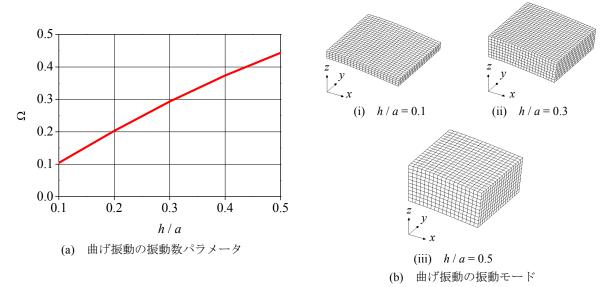


図-8 片持矩形板の曲げ振動の振動数パラメータと振動モードに与える板厚比の影響

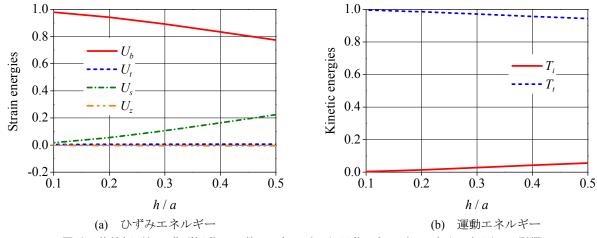


図-9 片持矩形板の曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比の影響

周知の通りであるが、図-2のみではこの影響を定量的に評価することは難しい. そこで、矩形板のひずみエネルギーと運動エネルギーを指標としてみる.

図-3 は、周面単純支持矩形板の対称曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比h/aの影響を示したものである。ここで、板厚比h/aは、図-2 と同様にして0.1から0.5まで変化させている。

これより,周面単純支持矩形板の曲げ変形に関係する成分である U_b と U_t は板厚比 h / a の増大にともなって減少するが,面外せん断変形成分である U_s は板厚の増大にともなって大きくなる。これは,板厚が大きくなると,面外せん断変形の影響が表れることを意味している。また,面外慣性に関係する成分 T_t は板厚が大きくなると僅かに減少するが,面内慣性に関係する成分 T_t は面外慣性成分 T_t が減少した分だけ増加することがわかる。これは,板厚の増大にともなって,面内慣性の影響が表れることを意味している。さらに,ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標

表-5 片持矩形板の曲げ振動状態

$\frac{h}{a}$	$rac{U_t}{U_b}$	$rac{U_s}{U_b}$	$rac{T_i}{T_t}$
0.1	4.573×10^{-3}	1.796×10^{-2}	3.835×10^{-3}
0.2	5.483×10^{-3}	5.841×10^{-2}	1.433×10^{-2}
0.3	6.824×10^{-3}	1.187×10^{-1}	2.894×10^{-2}
0.4	8.006×10^{-3}	1.965×10^{-1}	4.476×10^{-2}
0.5	8.953×10^{-3}	2.899×10^{-1}	5.943×10^{-2}

とした周面単純支持矩形板の対称曲げ振動状態の定量的な評価の一例として、曲げ変形に関する成分 $(U_b + U_l)$ を基準とした時の面外せん断変形成分 U_s の割合、曲げ変形に関する成分 $(U_b + U_l)$ を基準とした時の面外伸縮変形成分 U_z の割合および面外慣性に関係する成分 T_l を基準とした時の面内慣性に関係する成分 T_l で基準とした時の面内慣性に関係する成分 T_l である面内慣性に関係する成分 T_l を基準とした時の面内慣性に関係する成分 T_l である面内慣性に関係する面内間性の割合は極伸縮変形の割合と面外慣性に対する面内慣性の割合は極

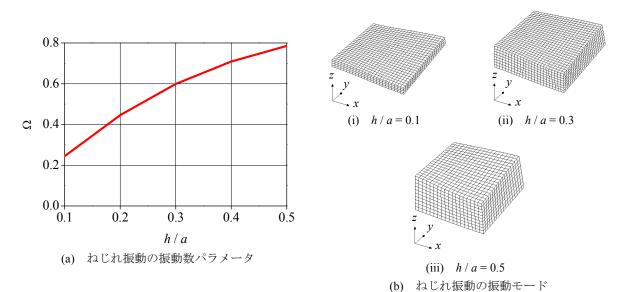


図-10 片持矩形板のねじれ振動の振動数パラメータと振動モードに与える板厚比の影響

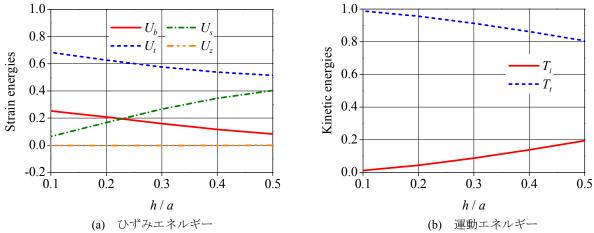


図-11 片持矩形板のねじれ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比の影響

めて小さく,周面単純支持矩形板の対称曲げ振動状態に影響を与えない.しかし,曲げ変形に対する面外せん断変形の割合は,h/a=0.1 の時に約1割程度,h/a=0.3 の時に約4割程度であり,h/a=0.5 の時には曲げ変形と面外せん断変形の割合が同程度になる.

図-4 に周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動の振動数パラメータ Ω とその振動モードに与える板厚比h/aの影響を,図-5 に周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比h/aの影響を示す。ここで,板厚比h/aは0.1から0.5まで変化させた。また,表-3 には周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動状態の定量的な評価を示した。

これらより、板厚の増大にともなう周面単純支持矩形板の逆対称曲げ振動の振動数パラメータ Ω の曲線的な増加は面外せん断応力 τ_{yz} , τ_{zx} および面外せん断ひずみ γ_{yz} , τ_{zx} による変形 (面外せん断変形や面外ねじれ変形) の影響が大きいことがわかる. また、周面単純支持矩形板の逆対称曲

表-6 片持矩形板のねじれ振動状態

$\frac{h}{a}$	$\frac{U_{_t}}{U_{_b}}$	$rac{U_s}{U_b}$	$rac{T_i}{T_t}$
0.1	2.706	2.572×10^{-1}	1.215×10^{-2}
0.2	3.019	8.059×10^{-1}	4.558×10^{-2}
0.3	3.613	1.675	9.552×10^{-2}
0.4	4.608	2.963	1.602×10^{-1}
0.5	6.198	4.855	2.408×10^{-1}

げ振動は、その対称曲げ振動と比較すると面外せん断応力 τ_{yz} 、 τ_{zx} および面外せん断ひずみ γ_{yz} 、 τ_{zx} による変形が生じ易いため、一次せん断変形理論である Mindlin 理論 5 による矩形厚板の自由振動問題の二次元解析では、理論誤差が生じる可能性がある.

図-6 には周面単純支持矩形板の面内振動の振動数パラメータ Ω とその振動モードに与える板厚比h/aの影響を、図-7 には周面単純支持矩形板の面内振動のひずみエネル

ギーと運動エネルギーに与える板厚比 h/a の影響を示してある. ここで,板厚比 h/a は 0.1 から 0.5 まで変化させた. また, $\mathbf{表-4}$ には周面単純支持矩形板の面内振動状態の定量的な評価を示した.

これらより,周面単純支持矩形板の面内振動の振動数パラメータ Ω の値は板厚によらず一定であるため,面内に動的荷重が作用する場合,その周波数成分には十分に注意する必要がある。また,周面単純支持矩形板の面内振動は面外変位 \overline{u} の影響を受けず,面内変位 \overline{u} , \overline{v} のみによって生じる自由振動状態であることもわかる。

図-8 に片持矩形板の曲げ振動の振動数パラメータ Ω と その振動モードに与える板厚比h/a の影響を,図-9 に片持矩形板の曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比h/a の影響を示す.ここで,板厚比h/a は 0.1 から 0.5 まで変化させている.また,表-5 には片持矩形板の曲げ振動状態の定量的な評価を示した.ただし, U_t/U_b は曲げ変形成分 U_b を基準とした時の面内せん断変形成分 U_t の割合, U_s/U_b は曲げ変形成分 U_b を基準とした時の面外せん断変形成分 U_t の割合および T_i/T_t は面外慣性成分 T_t を基準とした時の面外世んが変形成分 U_b を基準とした時の面外伸縮変形成分 U_a の割合である U_a/U_b はほぼ零であったので省略してある.

これらより、片持矩形板の曲げ振動の振動数パラメータ Ω は、板厚の増大にともなってほぼ直線的に増加する.ここで、ひずみエネルギー成分および運動エネルギー成分と 板厚の関係を見てみると、片持矩形板の曲げ振動は、曲げ変形成分 U_b と面外せん断変形成分 U_b によって構成されているが、板厚に係らず曲げ変形成分 U_b が支配的であることがわかる.また、面外慣性成分 T_t の影響が支配的であり、面内慣性成分 T_i の影響はほとんど見られない.

最後に、図-10 に片持矩形板のねじれ振動の振動数パラメータ Ω とその振動モードに与える板厚比h/aの影響を、図-11 に片持矩形板のねじれ振動のひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比h/a の影響を示した.ここで,板厚比h/a は 0.1 から 0.5 まで変化させている.また,表-5 と同様にして,表-6 は片持矩形板のねじれ振動状態の定量的な評価を示したものである.

これらより、片持矩形板のねじれ振動の振動数パラメータ Ω は、片持矩形板の曲げ振動の振動数パラメータ Ω と異なり、板厚の増大にともなって曲線的に増加する。また、片持矩形板のねじれ振動は、板厚が大きくなると曲げ変形成分 U_b よりも面内せん断変形成分 (ねじれ変形成分) U_i および面外せん断変形成分 U_s の影響が大きくなる。さらに、板厚の増大にともない、面内慣性成分 T_i の影響が最大で2割程度表れている。したがって、片持矩形板のねじれ振動の振動数パラメータ Ω の曲線的な増加は、面内せん断変形成分 (ねじれ変形成分) U_i 面外せん断変形成分 U_i および

面内慣性成分 T_i の影響であると考えられる.

このようにひずみエネルギーと運動エネルギーを指標として評価することにより、矩形板の自由振動状態や卓越する変形成分とそれらの割合を定量的に把握することが可能である。また、面外せん断変形成分や面内慣性成分の値に着目すれば、各種せん断変形理論の適用範囲の検討に関する指標にもなるであろう。さらに、この評価の考え方は簡易かつ単純であるので、誰もが容易に取り扱うことができる。よって、本評価方法は構造部材の自由振動特性の把握・理解に有用かつ効果的である。また、幾つかの構造部材から構成される構造物を対象としても同様の評価が可能であることは容易に理解でき、本評価方法は構造物の動力学的挙動を把握するための指標に十分成り得ると判断できよう。

5. あとがき

本稿では、基本的な構造部材である矩形板を例に取り、 ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とした矩形板の自由振動の状態の定量的な評価について検討した。その 結果、ひずみエネルギーと運動エネルギーを指標とすることにより、矩形板の自由振動における支配的な変形成分および変形成分の割合を定量的に把握することができることを明らかにした。また、面外せん断変形成分や面内慣性成分の値に着目すれば、各種せん断変形理論の適用範囲の検討に関する指標にも成り得る。さらに、この考え方は簡易かつ単純であるので、誰もが容易に取り扱うことができる。よって、本評価方法は構造部材・構造物の自由振動特性や動力学的挙動の把握・理解に有用かつ効果的である。

参考文献

- 小林繁夫,近藤恭平:工学基礎講座7 弾性力学,培風館,pp.1-66,2004.
- Harunobu Nagino, Takashi Mikami, Tomisaku Mizusawa: Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method, Journal of Sound and Vibration Vol.317, pp.329-353, 2008.
- Leissa, A.W.: Vibration of Plates, Acoustical Society of America, 1993.
- Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H.: Shear deformable beams and plates – Relationship with classical solutions, Elsevier, 2000.
- Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, ASEM Journal of Applied Mechanics Vol.18, pp.31-38, 1951.

(2013.9.30 受付)