

大分工業高等専門学校

紀 要

Memoirs of
National Institute of
Technology, Oita College

第 56 号

令和元年 11 月

NO. 56

November 2019

大分工業高等専門学校
National Institute of Technology, Oita College

〔研究論文〕

法の教育による市民—法専門家関係の再構築—役割体験学習論と『提案のちからⅠ』から—

久保山 力也

一般科文系

植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」の開発とアグリエンジニアリング教育実習科目の実践
7

小西 忠司¹・梅田 清隆²¹ 機械工学科, ² 株式会社 テック5軸マシニングセンタの回転軸角度誤差測定に関する研究・・・・・・・・・・・・・・・・・・14山本 通¹・西川 創太²¹ 機械工学科, ² 機械・環境システム工学専攻

多孔質チタンから製作した歯科インプラントの評価に関する研究・・・・・・・・・・・・・・・・19

坂本 裕紀¹・川上 雄二²

¹ 機械工学科, ² 久留米高専 材料システム工学科

仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法に設定する最適な仮想ばね定数の値について（その1）－中心軸圧縮力を受ける均質な等断面長柱の線形座屈問題－・・・24

名木野 晴暢¹・山本 寧音²・足立 忠晴³

¹ 機都市・環境工学科, ² 長岡技術科学大学大学院, ³ 豊橋技術科学大学

[仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法に設定する最適な仮想ばね定数の値について（その2）－自重の作用による均質な等断面長柱の線形座屈問題－](#) 38

山本 寧音¹・名木野 晴暢²・足立 忠晴³

¹ 長岡技術科学大学大学院, ² 都市・環境工学科, ³ 豊橋技術科学大学

平成30年(2018)10月～令和01年(2019)9月本校教員による著書、他誌等論文目録

論 文 等 題 目	著 者	掲載誌名等 (年.月)
3軸マシニングセンタで使える潜像加工用CAMの開発	本田 康太 安藤 開,	・ 佐藤 千明 ・ 山本 通 2018年度精密工学会九州支部講演会講演論文集, pp. 73-74
PWMインバータ励磁下の電磁鋼板製リングコアの鉄損測定法の検討	岡茂八郎 榎園正人	・ 清武 博文 ・ 若林大輔 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-19-098, pp. 1-4,
Noncontact Iron Loss Measurement of Motor Stator Core Using Radiation Thermometer in the Atmosphere	D. Wakabayashi M. Enokizono	・ M. Oka Book of Abstracts, 11TH Japanese-Mediterranean Workshop on Applied Electromagnetics for Magnetic, Superconducting and Nano Materials (JAPMED11), pp.
Iron Loss Evaluation for a Small High-efficiency Motor Stator Core Made of an Ultrathin Electrical Steel Sheet under PWM Inverter Excitation Using the Stator Windings Excitation Method	M. Oka D. Wakabayashi	・ M. Enokizono ・ H. Kiyotake Book of Abstracts, 11TH Japanese-Mediterranean Workshop on Applied Electromagnetics for Magnetic, Superconducting and Nano Materials (JAPMED11), pp.
高効率高パワー密度試作モータの性能評価	上野 尚平 若林 大輔 榎園 正人	・ 槌田 雄二 ・ 岡茂八郎 3A4-2, No.19-6 日本機械学会 第31回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム講演論文集, 2018(5)
小型高速モータ用ステータコアのための電磁鋼板の磁気特性評価	岡茂八郎 榎園正人	・ 清武博文 23A4-1, No.19-6 日本機械学会 第31回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム講演論文集,
電磁鋼板製リングコアのPWM励磁条件下の磁気特性測定法の検討	岡茂八郎 榎園正人	・ 清武博文 ・ 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-19-027, pp. 7-12, 2018(5)
非接触放射温度計を用いたモータ鉄心の鉄損評価	若林大輔 岡茂八郎	・ 小川慎吾 ・ 榎園正人 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-19-028, pp. 13-16, 2018(5)
Iron Loss Evaluation of Ultrathin Electrical Steel Sheet for High-speed Motor Stator Core under PWM Excitation	M. Oka D. Wakabayashi	・ M. Enokizono Proceedings of the 2018 XIII International Conference on Electrical Machines (ICEM), pp.1240-1245, 2018(9)
Magnetic Property Evaluation of the High-Speed Motor Stator Core Under Sinusoidal and Pulse Width Modulation Wave Excitation using Stator Winding Excitation	M. Oka	・ M. Enokizono Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 23, No. 3. pp. 458-463, 2019(3)

法の教育による市民—法専門家関係の再構築

— 役割体験学習論と『提案のちから I』から—

久保山 力也¹

¹ 一般科

法治国家において法専門家の存在は欠かせないが、彼らは歴史的に必ずしも市民の側に立つものではなく、ときに高圧的でした。現在ITの進歩は情報面において、市民と法専門家の非対称的状況を打破しつつある。とはいえ、全体的にはやはり法専門家の市民に対する優位性は明らかであろう。ここで焦点となるのは市民の法専門家活用能力である。

法の教育はそうした市民に欠如している能力を高める、極めて重要な契機であると考え、市民と法専門家がともにかわり、ともに成長する法の教育教材・プログラムの可能性について具体的理論ならびに事例を提示し、一定の緊張を有する市民—法専門家関係の再構築について論じる。

キーワード：社会科教育、法の教育、法専門家、アクティブラーニング

1. 法専門家をめぐる環境変化と役割体験学習

(1) ロースクール時代の教育と法専門家

社会科教育ないし法の教育において、市民の法専門家（本稿では法専門家を、特段の記載がない限り裁判官や弁護士、司法書士、行政書士など法関連士業を含むものとして扱う）活用能力はどのように育成されるべきか、またそれが市民ならびに法専門家の関係性向上にどのように寄与するのか、実践教材をふまえて考察することが本稿のねらいである。法の教育については現在かなりの程度認知されてきており、単なる実定法や判例の紹介という段階にはない。折しも、主権者教育の重要性が唱えられるなか、法治主義における「生きる力」の実体化、実装化はますます重要になっていると思われる。しかし、社会科教育の側面から鑑みると、法の教育は「〇〇教育」の1つに過ぎず、かつなんらかの形でこれまでも提供されてきたわけであって、正直物好きの範疇を出ないという見方もある。既存の学校教育プログラムとどのように法の教育がつきあっていくかについては、いまだ課題が多い。とにかく、法の教育がその新しさを前面に押し出して既存プログラムを批判したり、何もしていなかったかのように語ったりすることは控えなければならない。

法の教育をマクロ的にとらえるとき、そこにはシステム上重大な問題が横たわってきた。それは、初等教育から高等教育、そして法曹（狭義的には司法試験に合格し司法研修所の二回試験に合格後、裁判官、検察官、弁護士のいずれかとして稼働した者）養成教育にいたる一連の過程において一本筋の通った教育が展開されてこなかったという問題である。このことは、2014年に法科大学院（以下、ロ

ースクール）が開学して以降如実になった。制度的にも学校教育との一貫性をはかるロースクールにおいて、教育カリキュラムをいかに策定するかということは生命線である。従来、法曹養成教育は司法試験から司法研修所、そして裁判所や弁護士会などによる継続教育に委ねられており、事実上試験予備校が導入教育の一翼を担ってきた。ロースクールの設置はこの過程を一切揚棄し、学校教育のなかに位置づけるという意味を持つ。そこで、74（最大時）のロースクールはそれぞれ「特色」と称し、どのような法曹（ときに法関連士業も含み）を育成するか明らかにしてきた。カリキュラムもそれに連動し、司法試験突破のみを至上命題に掲げてきた歪な法曹養成教育にはっきりとノーを突きつけたはずであった。しかし、さまざまなバックグラウンドや社会経験を積んだ豊かなマインドを有する新しい法曹の養成は、教育体制やカリキュラムの未熟さからではなく、政治的な思惑によりあっさりと頓挫する。とはいえ時代や社会の変化に応じた法曹ないし法専門家の育成は、こうした制度的な瓦解状況にあってもなお追及されなければならない。一方、ロースクール制度導入によって変化がまったくみられないわけでもなかった。教育レベルにおいては法専門家について彼らの活動全般をとらえる、いわゆるローヤリングに着目されたことは成果の一つである。以前これは資格取得後の研修や徒弟制度下先輩から非公式的に伝授される機会に任されており、職業集団としての一種の「臭み」の一因となっていた。その結果ジャーゴンや秘儀的な技法が彼らの文化を形成し、市民からみれば非常にとっつきづらい空間が形成されていく。司法が権威的であるからこそ市民は法に従い、法秩序がこれによって維持されているという見方もその背景に多分にあっ

た。だが、久保山 (2018) ¹⁾ が指摘するように IT の進歩は、法専門家と市民との関係性を大きく変えつつある。法関連情報の検索は従来と比べものにならないくらい容易になったし、それにともない司法のあらゆる局面は市民の評価に付されつつある。こうした時代にあって、市民のニーズに十分対応するローヤリング力を有することは、法専門家にとって必須要件である。とくに「在野法曹」といわれる弁護士や、「隣接」法専門家ともいわれる司法書士、行政書士などの資格者にとっては、事務所経営と生活に直結する一大事である。情報の非対称状況を背景とし、パターンナリスティックにクライアントと関係を取り結ぶ従来のやり方ではうまくいかなくなっている。変化は、彼ら業界の内部においてもみられる。報酬規程の撤廃や広告の自由化、法人化などは競争を激化させ、ローファームといわれる大規模事務所も誕生した。法務部をかかえるような企業クライアントを相手にする大規模事務所に比べ、個人クライアント対象の法専門家はとくに強く変化の波にさらされるようになった。

(2) 市民サイドの変化に対する備え

市民にもこうした変化への相応の備えが必要であろう。個人クライアントの、弁護士ないし司法書士、行政書士など法専門家へのアクセスの窓口となる法律相談の機会はかなり増加した。無料法律相談は、都市部であれば日常的に開設されているし、国もテラスを設置し広く対応している。弁護士会のひまわり基金法律事務所や司法書士会の総合相談センターなど、各士業団体も相談の機会を多く設けている。遠隔地や島しょ部への対応必要性も早くから気づかれていた。しかしながら、法専門家によるそうした取り組みは、必ずしも市民との間の心理的距離を縮めてはいない。いわゆる過払い金「バブル」の際に消費者金融さながらの手法で事件をかき集める姿はともすれば法専門家のどう猛さを示すものでもあったし、情報の非対称性が改善傾向にあるとはいえ法的処理空間はやはり法専門家のコントロール下にあるとみられる。

司法全体では、更生保護における意見等聴取制度などの犯罪被害者等施策 (2007 年)、刑事裁判への被害者参加制度 (2008 年)、裁判員裁判制度 (2009 年) など、市民参加の方向性にはあるが、前二者は対象が限定的で、裁判員裁判制度については重大刑事第一審のみへの導入にとどまるほか辞退者の割合が相当数に上るなど、さまざまな問題が提起されている (最高裁判所 (2019) ²⁾ によれば最終的な辞退率は導入初年の 53.1% (2009) から徐々に上昇し直近では 67.0% (2018) となっている)。裁判員裁判対象事件の捜査段階での録音・録画を定める「取調べの可視化」も一見市民寄りの施策のようにみえるが、そもそも「脅し・すかし」によって自白を強いる圧迫的取り調べは法制度の看過するところではなく、あくまで制度内部の改善にとどまる。こうして考えてみると、刑事分野では法専門家 (な

らびに法制度) と市民の距離は遠く、法専門家は依然パターンナリスティックでありうる。弁護士の専門分化が諸外国ほど進んでいない日本において、市民は一般的に民事／刑事を分けて考えない傾向にあると思われ、刑事分野におけるイメージは俄然法専門家全般のイメージへと直結する。繰り返すように、IT 革命による変化の兆しはある。しかし法専門家業界内部において、宮澤 (2019) ³⁾ に明らかなように、かねてアメリカで指摘されたような企業クライアントを顧客とする弁護士・弁護士法人と個人クライアントを対象とする弁護士・弁護士法人の二極化は、司法書士など他の法専門家を巻き込んだ形で徐々に進んでいる一方で、市民は蚊帳の外におかれている。

では、市民サイドはこうした一連の司法環境の変化にどう対応すべきか。これまでの検討で一つ明らかになったことは、法制度や法専門家に任せるわけにいかないということである。法制度については中途半端な諸施策がことごとく成功していないし、法専門家業界はますます企業化し個々バラバラな市民にとっては互し難い存在になりつつある。情報の非対称性を前提とした従来型のパターンナリスティックな関係はゆらぎつつあるが、他方青年実業家の法専門家による「スマートな」市場支配が始まっている。こうした状況に際し、市民に立脚した具体的施策が求められる。端的には、法専門家を俯瞰し評価することのできる視点の獲得をはかるための教育プログラムならびに教育教材を準備し、市民の法専門家活用能力をはからねばならないと考える。

(3) 役割体験学習論と法の教育

学校教育においては近年アクティブラーニング (以下、AL) の価値が標榜されている。しかし、AL 自体は特段新しいものではないし、教育という性質上 AL 的要素をその内に含むことは当然のことである。そもそも AL を単に学習者の能動的な意欲を喚起させる体験的活動の総称としてとらえる見方はやや中途半端で、とくに社会科教育において AL を考えるときには具体的に育成されるべき能力を明確にして、理論づけする必要がある。井門 (2002) ⁴⁾ はこの種の能力を社会的実践力として定義し、善い社会の実現をはかるこうした社会的実践力を育成するために、学習者が役割を担い実際問題を解決する教育法を役割体験学習と規定した。この枠組みを使って、法専門家と市民との新しい関係をとらえるための具体的な教育プログラムならびに教育教材について考えてみよう。

この種の教育で、一般的に実施されている模擬裁判はどうだろうか。模擬裁判教育は、裁判員裁判制度導入前後からその学校教育における実施が顕著になった。裁判員が市民から選出されることもあり、それは比較的抵抗なく受け入れられた。ここでは通常、裁判官や検察官、弁護士、書記官、被告人 (刑事)、原告・被告 (民事)、証人などを学生が演じ、いわば役割体験をする。臨場感向上のため、

実際の法専門家が一部役割を担うことがある。また人定質問から弁論手続にいたるまでの一連のプロセスを映像などにより理解し裁判員の立場から有罪無罪の判断を下すパターンもあるが、これも一定の役割を演じる模擬裁判教育の一種であると考えられる。ところで前掲・井門(2002)は AL 理論化の観点から、実践が行われる学習の場と学習主体とを、現実ないし仮想といった次元とクロスさせて、役割体験における類型化をはかっている(図 1)。

これによれば模擬裁判は、学生が日常とはかけ離れた弁護士などの役割を演じることから「主体仮想」、かつ裁判空間が模擬的に演出されることから「場仮想」ということになり、第四類型に属する活動とい

	場現実	場仮想
主体現実	第一類型 農業実習 教育実習 介護体験	第二類型 シミュレータ 防災訓練
	第三類型 目隠し体験 車いす体験 高齢者体験	第四類型 劇・劇化 ロールプレイング シミュレーション

図 1 4つの類型

うことになる。この類型化作業を通じて、現行模擬裁判教育の価値と限界の一端がみえてくる。価値の面では、法曹のふるまい方と裁判システムの理解が進むということがある。他方限界については、裁判は紛争解決の一形態に過ぎないわけで、かつルール化が高度に進んだ裁判の方法を学ぶことでかえって視点を狭めかねないということがある。また模擬裁判はそれを切り取って行われることが多くトータルな紛争処理過程の把握にはつながりづらいし、そもそも将来法曹になる学生は希少で役割体験の効果は局限されるという問題も指摘できよう。何よりも、模擬裁判教育では法専門家活用能力の増進は期待できない。では、模擬裁判教育以外の方法論はないのであろうか。次章で具体例を挙げて考えてみたい。

2. 「提案のちから」という提案

(1) 3つのスキル

教材『提案のちから I』⁵⁾は、法専門家の役割を体験しながら争う当事者間に介入し、提案の作法を学ぶ体験型教材として設計された。同教材において学習者に獲得されるべきスキルは3つある。第1に「うながす」スキルがある。これは同教材の副題にもなっている「提案空間をデザインする」ということと密接に関連しており、両当事者の発言や思考の方向性をコントロールし提案が受け入れられやすい雰囲気づくりができるというものである。第2に「かかげる」スキルがある。これは当事者の語りを傾聴することで主張や達成目標、背後に隠された真意などを見抜き、

いい換えたり再構成したりしながら当事者にわかりやすく争点あるいは解決されるべき課題をリスト化できるというものである。第3に「しめす」スキルがある。これは最終的に当事者に寄り添いつつ、将来を見据えた提案をすることができるというものである。ただし参加者はこうした3つのスキルに明示的に気づく必要はなく、プログラム内に配置された3つのワークを通じ自然に体得する。

(2) 『提案のちから I』の展開

本教材『提案のちから I』で参加者は、デジタル紙芝居で描かれるストーリーを理解し3つのワークを行う。ストーリーは、とある村の茶店に1つの家族がもめごとをもちこむところから始まる(図 2)。この茶店のおばあさんは、さまざまな悩みやもめごとを「名提案」で解決に導くというこ



図 2 登場人物

うことで有名であった。話によれば、家族の父親が他界後家業の和菓子屋をそのまま営むか、洋菓子屋にかえるかで争っているということである。参加者はこの茶店のおばあさんになりかわって、家族間の争いを解決に導かなくてはならない。なお、実施時間は45分となっている(図 3)。

⑦ 本時の展開			
内容	配当分(累積)	学習活動	指導上の留意点・配慮事項
導入	5 (5)	○ワークシート①を確認する。 ○紙芝居で背景状況を確認する。	●ワークシート①を配布する。 ●紙芝居上にてストーリーを進める。
第1の選択 正解A	3 (8)	○第1の選択を行う。 ▶肢A あいだに入って話を聞かせてもらってもいいか確認する ▶肢B 話し始めてしまったのでとりあえず聞く	●ABフリップを用い、選択を問う。 ●選択が多いほうの肢に進む。不正解肢(B)に進んだ場合は終了となるがすぐに正解肢に戻ってストーリーを進める。
第2の選択 正解B	3 (11)	○第2の選択を行う。 ▶肢A いったん、ここで、解決の提案をする ▶肢B 黙ってそのまま話を聞く	●ABフリップを用い、選択を問う。 ●選択が多いほうの肢に進む。不正解肢(A)に進んだ場合は終了となるがすぐに正解肢に戻ってストーリーを進める。
第3の選択 正解B	3 (14)	○第3の選択を行う。 ▶肢A 「そうねえ、ケーキ屋がいいからね」と相づちをうつ ▶肢B 「そうねえ、どうかしらねえ」と、はっきり答えない	●ABフリップを用い、選択を問う。 ●選択が多いほうの肢に進む。不正解肢(A)に進んだ場合は終了となるがすぐに正解肢に戻ってストーリーを進める。
第4の選択 正解B	3 (17)	○第4の選択を行う。 ▶肢A じつと黙っておく ▶肢B やさしく落ち着かせる	●ABフリップを用い、選択を問う。 ●選択が多いほうの肢に進む。不正解肢(A)に進んだ場合は終了となるがすぐに正解肢に戻ってストーリーを進める。
最終提案準備	2 (19)	○最終提案に向けた準備を行う。	●グループに分け発表者を確定させる。 ●人物紹介図(個人)・最終提案フリップ(グループごと)を配布する。
最終提案ワーク	8 (27)	○最終提案ワークを行う。	●グループのファシリテーターを務める。
最終提案の発表	6 (33)	○最終提案フリップを作成する。 ○最終提案の発表を行う。	●最終提案フリップを作成させ、各グループの代表者に発表させる。 ●1グループ1分程度にまとめる。
振り返り	3 (36)	○4つの選択について振り返りを行う。	●視点を4つの選択に転じさせ、何が重要であったのか注目させる。
物語の終焉	2 (38)	○ショッピングモールの登場と物語の結末を確認する。	●紙芝居上にて、ストーリーを進める。
「残った」ワーク	5 (43)	○ワークシート②を確認する。 ○「残った」ワークを行う。	●ワークシート②を配布する。 ●「残った」ワークの記載内容を確認する。
価値づけ	2 (45)	○「価値づけ」を聴いて、「提案のちから」とは何か、理解する。	●「価値づけ」作業を行う。

図3 『提案のちから I』の実践展開

ポイントとなる 1 つめのワークは提案が受け入れられやすい空間をつくるための地ならしをする「4つの選択」ワークで、

①第三者としてかかわることの確認を求める(第1の選択), ②当事者の想いを十分はき出させるためにしっかりと傾聴する(第2の選択), ③一方当事者に肩入れしないで中立的立場を徹底する(第3の選択), ④当事者が激昂し口論を始めた場合に

落ち着かせるため介入する(第4の選択), といった4つについて2択の問題を設定し, 選択させる(図4). これは参加者全体によるワークとなるため多数の支持を得た選択肢の方に進むが, 誤肢を選択した場合でも簡単な解説をほどこした後ストーリーは進行する. この「4つの選択」ワークにおける正誤はあくまで便宜的であるので正解すること自体に特段意味はなく, 参加者は提案空間の創造にあたり専門家として留意すべきポイントについて学ぶことになる.

2 つめのワークは茶店のおばあさんの立場から争いを解決するために行う「最終提案」ワークで, グループワークにてフリップを作成する(図5). ここで多くのグループでは, 当事者の状況や主張に基づき, 和菓子屋を維持するか洋菓子屋に転じるか, はたまた他の事業展開や店舗形態の運用で争いを回避するかなど, さまざまな具体的な解決を提案することになる. と

ころが, この後事態は急激に変化する. すなわち, 近隣に大型ショッピングモールが登場し, 大方の提案は意味をなさなくなる. なぜなら, 先の「最終提案」は大部分, どういった形態にせよ経営が一定程度成り立つことが前提とされた議論であったからである. 紙芝居ストーリーはここで終了する.

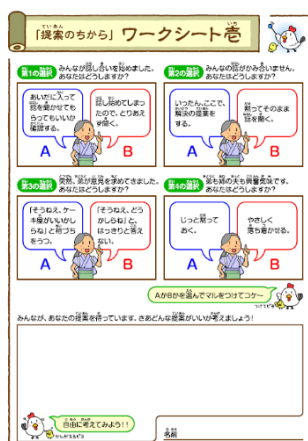


図 4 ワークシート巻

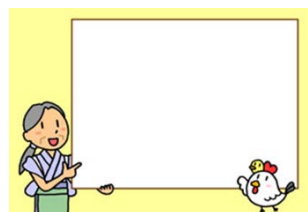


図 5 「最終提案」フリップ



図 6 ワークシート式

3 つめのワークは一見無駄にみえる話し合いとそこでの提案をどう評価するか, ということにかかわる. おばあさんは問いかける. 「ショッピングモールができて, 提案が無駄になったと思ったかもしれないけれど, でも, これまでやってきたことが, もし無駄じゃなかったとしたら—」. 参加者は, この問いかけに対し「～が残った」という形でその回答を考える(図6). この真意は, 提案の中身そのものよりも争う当事者同士が話し合えたことに価値を見出し, 提案者として提案を受け入れられやすい細心の配慮をすること, つまり「提案空間をデザインする」ことが大切であるということに気づかせるということである.

(3) 役割体験学習論からみる『提案のちから I』の評価

さて, それではこの『提案のちから I』について, 役割体験学習論から評価してみたい. 本プログラムは類型としては, 参加者が法専門家を想定した茶店のおばあさんの立場から提案空間の創造ならびに具体的提案を行うということで「主体仮想」, かつフィールドが紙芝居ストーリー上にて展開されるということで「場仮想」になるため, 第四類型に該当するとみられる. この第四類型には前掲・井門(2002)によれば劇, シミュレーション, ロールプレイングなどが該当し, 非日常の世界を疑似体験することで役割を実感的に理解できるようになる. これに関し『提案のちから I』では3つのワークを設け, それぞれ異なった側面から法専門家の役割体験ができるよう工夫されている.

最初の「4つの選択」ワークでは法専門家による場づくりの方法を学ぶ. 民事紛争ケースの場合, まずは争点を明確にする必要がある. 当事者にはさまざまな想いがあり, うまく整理できていないことが多い. 従来型・パターンリスティックな関係による紛争処理過程では, 法専門家は当事者の語りのなかから法的処理に役立つ情報のみを取り出し, 他の部分は不要なものとして切り捨てる傾向にあった. 法専門家養成教育においても, ケースを類型化し既成のルールにあてはめ, それから結論を導き出すといった法的三段論法が重視されていた. そのことが当事者の疎外感を高め, 法的処理空間に対する冷淡なイメージを作り上げていた. この処理スタイルは大量な案件を解決するのには向いている. 一方, 当事者は処理プロセスにおいて自らの紛争を主体的に考える機会を奪われる. もちろん, 紛争解決に関与することで当事者の成長をはかるといった考えはそこにはない. しかし上述したように IT 技術の進歩は情報の非対称性を修正しつつある. 法的情報はオンライン上に氾濫しており, 紛争が法専門家に持ち込まれる際には当事者は相当程度法的処理プロセスや「相場」ないし「落としどころ」を下調べしてくる. 判例情報を事前に検索することも珍しいことではないし, セカンドオピニオンとして単に「正しさ」の確認に訪れるということもある. もはや, 法的三段論法や法専門家の経験だけがものをいう時代にはないということである.

ではこの新しい時代にふさわしい法専門家の作法とは何か。それは、第三者として環境づくりに努め、当事者の語りを受けとめ、トータルで満足度を高めることにほかならない。そのために法専門家は、当事者が自らの紛争の解決プロセスにコミットすることで成長をはかる効果について理解する必要がある。当事者の語りの重要性については従来指摘されてきたところではある。たとえば和田(1994)⁶⁾は、司法書士が制度上紛争ケースに直接介入できないことから裁判所に提出する際の書類作成業務を通じていわゆる「本人訴訟」支援を行っていることに着目し、司法書士とクライアントとが協働するモデルの価値を明らかにした。『提案のちからⅠ』が役割体験をはかる法専門家は、まさにこうした協働志向的法専門家ということになる。

第2、第3のワークも当然こうした考えに基づき設計されている。とはいえここには役割体験上、仕組みが必要となる。なぜなら、第2のワークでは参加者は当事者の語りをふまえた「最終提案」をするわけであるが、いくら「主体仮想」かつ「場仮想」だからといって無制限な提案は排除されなければならないからである。本来的確な提案をしようとすれば、さまざまな状況を総合的に考慮し判断する必要がある。しかしながら教育実践制約上多岐にわたる情報を入れ込むことは難しく、第一、個別具体的な事例への対応を学習する趣旨ではないのでこの際は不適当である。そのため、第2のワークの修正をはかる目的でショッピングモールを登場させ、個別具体的な視点からの解放をはかる(図7)。



図7 視点の転換

つまりショッピングモールの誕生により「最終提案」は無力化し、視点がリセットされる。これは教育上の配慮でもあるが、この種の状況の変化は現実の紛争解決においても十分起こりうる。参加者はここで、解決にかかる提案が単なる一時点のそれに過ぎないことを学ぶ。そして状況は刻一刻と変化しており、特定のタイミングにおいて最も適した提案であったとしても、前提条件が失われれば一気に無意味化することを知る。その上で第3のワークでは、参加者の視点を対立当事者が話し合いを行ったこと、その価値に向けさせる。そして話し合いの結果何が「残った」のか考えることを通じて、紛争解決プロセス全体を俯瞰することの大切さに思いいたる。ここでも教育実践上、「何」に該当する箇所にどのような回答がなされようと問題ではない。仮に、「ショッピングセンターが残った」といった回答がなされたとしても、それは評価に値しない。大事なことは、あくまで法専門家として紛争解決に介入し提案する際の姿勢を学ぶという点にあるからである。

ここで、『提案のちからⅠ』の価値をまとめておこう。第

1に、参加者は茶店のおばあさんになりかわって対応を考えるわけであるが、形式的には紛争に介入する法専門家の役割を体験することになり、その教育効果は役割体験学習論に照らして十分評価できる。第2に、参加者は対立する当事者の間に入ってその解決をはかる提案をする際の作法と重要な視点に関する気づきを得るが、それはALをうながす契機となる。第3に教材全体をみると、従来縁遠い空間とみなされがちであった法的処理空間を身近なものとしてとらえることができるようになるという意味で、法の教育教材として新規性があるように思われる。他方境界もある。対象空間が民事紛争に局限されているほか、役割体験学習論は4つの類型化を行いつつそれら相互の関連性を重視するものであるが、『提案のちからⅠ』と他の教育プログラムとの連携ははかられておらず課題となっている。

3. 提案力向上問題の本質

(1) 法の教育と法専門家

現在、18歳選挙権や成人年齢の引き下げなど制度の変更、あるいは消費者トラブルの増加など社会問題を背景として、都度教育へのテコ入れがなされている。消費者庁はそのホームページにて消費者教育の教材を多数公開しているし、法務省もまた同様である。その他、最高裁判所や法テラス、日本弁護士連合会や日本司法書士会連合会など、さまざまな団体が相乗りの状況にある。こうなってくると、はたして何が「正しい」法の教育なのか、何をどの程度実施すれば法の教育をしたことになるのか、まるでわからなくなる。公開教材は環境に応じて実施するよう謳うが、実際のところ使用実績は限定的であろう。そのため学習指導要領に法の教育の実施を明記し、あるいは教科書へそれを記載することが求められることになるが、これらの効果も不明である。新教科「公共」においても当然考慮されることになるものの、はたして法の教育のゴールとは何であろうか。

『提案のちからⅠ』ないしこれを含む「3つのちから」シリーズ(『解釈のちから』(2004),『相談のちから』(2018),『提案のちからⅠ』(2019),『提案のちからⅡ』(2019))は一定のゴールを掲げてこの問いに答えようとしている。それは、法専門家に対する市民力の向上である。このため「3つのちから」シリーズは基本的には法専門家によるかわりを必須なものとしている。それは役割体験学習論が示しているように、臨場感の向上による教育効果の増進をはかるものでもあるが、同時に久保山(2010:104)⁷⁾が指摘するように法の教育にかかわることで法専門家自身の成長を企図するものでもある。たとえば青沼(2019:52)⁸⁾は函館司法書士会による『相談のちから』の実践において、(法律)相談という行為が相談者と(法)専門家の共同作業で

あり、その成否は相談者の協力に委ねられているところが大きい点に触れ、相談者が「自ら主体的に解決する姿勢であることが問題解決に向けてのプロセスにおいて重要な鍵となる」ということは、普段の業務を振り返ってみても心あたり」があるという。こうした気づきから、同教材は法専門家にとっても重要な AL の契機になっているものと評価する。

他方、法の教育において、司法、とくに法専門家は謙虚であらねばならない。久保山 (2017)⁹⁾は全国教育委員会に対する法の教育調査をまとめているが、ここでも法専門家の教育への介入に一定の疑問が呈せられている。いかに内容が裁判や法律相談など法専門家にとっては日常業務に該当する法的処理空間にかかわる事象であったとしても、法専門家が指導的立場にたって教育者に対し法の教育について教授法を主導するといったことは慎む必要があるように思われる。ゲストティーチャーは従来活用されてきたし、その効果は認めるところではある。しかし法の教育の主たる担い手が法専門家であることには、これまでの法専門家教育をふまえて考えてみると違和感がある。こうした介入を許してしまった背景には前掲・井門 (2002) が指摘しているように、AL の理論化が未熟であったこともある。役割体験学習論はこの一つのソリューションとして有効であるように思われ、これに基づき設計された「3つのちから」シリーズもまた一定の価値があると考えられる。

(2) 市民と法専門家がともに成長する法の教育

Sen (1985)¹⁰⁾はかつて基本的潜在能力の平等問題を提示し、運用能力の欠如した者に資源を投下したとしても効果的な使用は期待できず福利厚生増進につながらないと述べた。司法制度の一連の改革と法専門家業界内部の環境変化は、個々の法専門家の考え方や態度にたしかに影響を及ぼしている。市民向けサービスの向上を考えない法専門家はもはや時代にはついていけない。しかし前掲・Sen (1985) の見解に依拠すれば、法専門家の意識改革や法関連サービスの制度改善は片面的な対応に過ぎず、問題の解決には程遠い。

市民の法専門家に対する「構え」はさほどかわっていない。法の恣意的使用がいかに「公共の福祉」に抵触しようと、市民はどうしても法を恣意的に用いることを追求する。法専門家は自己の利益を最大限に活かすためのツールでしかなく、法専門家もそれに応えようとする。しかしたとえ恣意的であっても運用できるのは一部の「プロ市民」だけであって、結局この構造は市民を引き裂きかねない。

法の教育はこうした状況において極めて重要で、効果的でありうる。すなわち、法の教育を通じて法専門家に対する市民力の向上をはかることで、市民と法専門家の新しい関係性の構築ははかられるものと考えられる。実際のところ、

法の運用において法専門家を排除することはできない。だとすれば、市民の法専門家活用能力の向上をはかることは当然であろう。こうした観点に立つ法の教育は、これまで別個に行われてきた学校教育ないし社会科教育における法関連教育と法専門家に対するさまざまな教育機会とをつむぐものでなければならない。同時に、一部「プロ市民」による法専門家の運用問題も考慮されなければならない。

本稿では、市民と法専門家とが従来のパターンナリスティックな関係から変化しつつある状況をとらえながら、やはりパターンナリスティックになりがちな法専門家主導の法の教育を批判し社会科教育に立脚した提案力の向上をはかる教材例を提示することで、市民と法専門家がともに成長するモデルを描いた。法の教育自体が市民ならびに法専門家の対話の契機となることについて、一層考慮しなければならない時点にきている。提案力向上問題の本質は、法専門家と市民の関係性の再構築にあるとみとめるものである。

参考文献

- 1) 久保山力也 (2018) 「法的相談力はいかにして養われるか」大分高専紀要 (55) 大分工業高等専門学校。
- 2) 最高裁判所 (2019) 「裁判員制度 10 年の総括報告書」
http://www.saibanin.courts.go.jp/vcms_lf/r1_hyou_si_honbun.pdf (2019.09.29 21:21 アクセス)。
- 3) 宮澤節生監訳 (2019) 『アメリカの大都市弁護士』(原著ジョン・P・ハインツら“Urban Lawyers”) 現代人文社、とくに第 12 章変化のプロセス参照。
- 4) 井門正美 (2002) 『社会科における役割体験学習論の構想』NSK 出版。
- 5) 久保山力也 (2019) 『提案のちから I』日本司法書士会連合会。※執筆時予定
- 6) 和田仁孝 (1994) 『民事紛争処理論』信山社。
- 7) 久保山力也 (2010) 「リーガルサービスのパラダイム転換へ向けた「法教育」」青山法務研究論集 (1) 青山学院大学大学院法務研究科。
- 8) 青沼千鶴 (2019) 「函館会の挑戦『相談のちから』法教育への取り組み」月報司法書士 (572) 日本司法書士会連合会。
- 9) 久保山力也 (2017) 「対話する『法』と『教育』」法教育研究 (12-2) 韓国法教育学会 (原文韓国語)。
- 10) Sen, Amartya K. (1985) “Commodities and Capabilities” Elsevier Science.

(2019.9.30 受付)

植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」の開発と アグリエンジニアリング教育実習科目の実践

小西 忠司¹・梅田 清隆²

¹ 機械工学科, ² 株式会社 テック

本報告では、文部科学省の平成29年度「K0SEN(高専)4.0」イニシアティブの「アグリエンジニアリング教育(研究)の導入」の採択により実施する専攻科1年生「つながり工学演習」の内容、および演習を目的に開発した植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール(フランス語で「緑の箱」の意味)」を紹介する。農学・生物系学科がない工学系の大分高専において、植物を対象にした計測の実験及び生態データの解析をコンパクトにかつ能率的に収めた装置は、利便性に富み、植物基礎実験に有効である。本実習を含めた大分高専アグリエンジニアリングのカリキュラムの今後の修了生の輩出により、我が国の農業を工業技術から支える人材が増え、我が国農業のあり方が変わるものと期待する。

キーワード：アグリエンジニアリング、植物基礎実験、光合成機能評価、環境制御

1. 緒言

近年の工業技術の進展とともに、農工連携技術や農業の工業化のさらなる発展が期待されており、この発展を促進する上で、農学の素養を持った工業(工学)技術者の育成は大切な視点の一つである。我が国の農業は、農業従事者の減少と高齢化、狭隘な農地、生産性の課題を抱えており、その解決に「農業の工業技術化」が求められ、その促進には、農業の工業技術化を支える人材の育成が不可欠である。高等専門学校(高専)は、実験・実習等を重視した教育プログラムを特徴¹⁾とする実践的な技術者養成を行う機関として高く評価されており、ニーズに対して既存技術を巧みに組合せて製品を創ることを得意としている。大分高専では「アグリエンジニア」の育成を目的とした横糸型教育プログラムを導入し²⁾、プログラム修了要件として、生物及び農学の素養、「いきものづくり」の難しさと面白さ、農業現場もエンジニアの活躍の場、農業の工学的経営視点の4項目の修得を掲げ、これまでの工学実験実習科目の一部を農学・農業に関するテーマに置き換えた³⁾。

専攻科1年生の「つながり工学演習(学修単位1)」では、工学的な見方・考え方を働かせ、見通しをもって学習することなどを通して、アグリエンジニアリングに係わる事物・現象を工学的に探究するために必要な資質・能力を次のとおり育成することを目指しており、①工学的に探究するために必要な計算・解析などに関する基本的な技能を身

に付けること、②計算などを行い、工学的に探究する力を養うこと、③アグリエンジニアリングの事物・現象に進んで関わり、工学的アプローチ方法を考えること、④自然環境の保全と科学技術の利用の在り方について工学的に考察することを通して、持続可能な社会をつくることが重要であることを認識することを到達目標としている。

本報告では、「つながり工学演習」での使用を目的として開発した植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」を紹介する。なお「カレ・デ・ベール」とは、フランス語で「緑の箱」を意味しており、共著者の梅田が命名した。

2. 植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」開発

製作した植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」を図-1に示す。装置サイズは、図-1(a)に示す格納時では800(タテ)×850(ヨコ)×1800(タテ)で、エレベータで移動可能なコンパクトサイズに配慮した。実験時には、図-1(b)に示すように、両翼を広げて、1500(ヨコ)に拡張される。「カレ・デ・ベール」は、土壌または水耕栽培の高さ550以下の植物を調査対象とし450(タテ)×450(ヨコ)×600(タテ)の亚克力樹脂製密閉容器である「植物設置モジュール」(図-2(a))と、容器出入口や内部のガス量、CO₂と温湿度センサー、土壌及び葉表面水分センサーにより植物状態を計測する「環境計測モジュール」(図-2(b))から構成されており、製作費は約50万円に納めた。「カレ・デ・ベール」の光源として、

蛍光灯とLEDの2種類を準備し、実験では20名程度の学生数に対応できるように2台製作した。「カレ・デ・ベール」の開発に当たり、植物の入搬出のしやすさとCO₂測定のための密閉性を両立するためアクリル樹脂製容器の気密性の工夫、1つの実験装置で、太陽光と人工光(蛍光灯とLED)による実験を短時間に簡便に切替できる工夫、光合成速度実験に必要な密閉型容器とエネルギー収支実験に必要な通風型容器を同一容器にて実現する工夫、温度・湿度・CO₂センサーの小型化と容器への取り付け位置の工夫を行った。

また、アクリル樹脂製密閉容器内の温湿度を可変する「環境制御モジュール」(図-3(a)), ネットワークカメラやデータレコーダーなど画像解析が可能な「画像およびデータ収集・解析モジュール」(図-3(b))を付加することにより、植物の成長をより深く考察できる拡張性を考慮した「カレ・デ・ベール plus」も製作した。なお、「puls」追加により製作費は約100万円となる。



図-3 「カレ・デ・ベール plus」の(a)環境制御モジュールと(b)画像およびデータ収集・解析モジュール

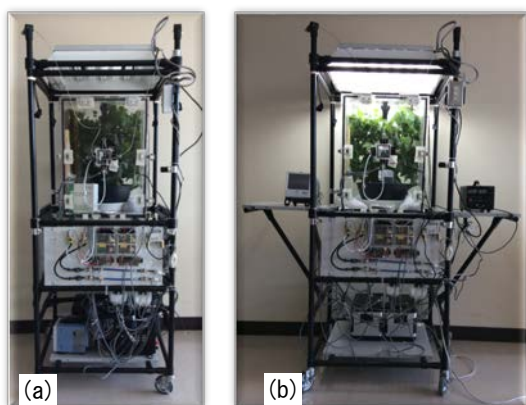


図-1 植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」の(a)格納(移動)時と(b)実験時の写真

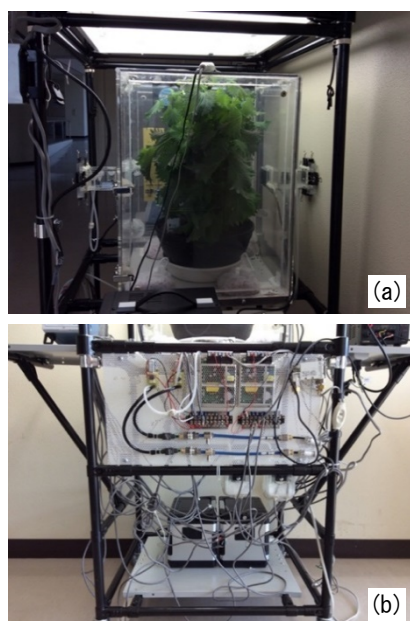


図-2 植物基礎実験装置「カレ・デ・ベール」の(a)植物設置モジュールと(b)環境計測モジュール

3. つながり工学演習の概要

表-1に「つながり工学演習」全体の授業計画を示す。各週毎の授業は、講義と実験を有機的に組み合わせで構成されている。また同学年で実施されている座学「農業概論」⁴⁾で学習した内容とも一部関連性があり、高専の特色である「実践的な学び」ができる。

図-4(a)は、放射測定装置を示しており、日射計2台、光量子計、照度計、赤外線放射計、温度計、熱電対、棒温度計、ロガー、黒球、スタンドから構成されており、図-4(b)は、分光放射計を示しており、「カレ・デ・ベール」内に設置された植物が、太陽やLED、蛍光灯下に置かれた場合の放射の計測が可能である。この放射計測装置(約65万円)、分光放射計(約130万円)を加えると、拡張性が増して実験項目が充実する。

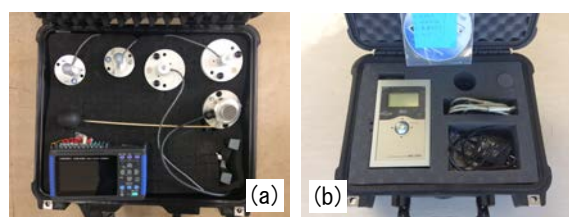


図-4 (a)放射計測装置と(b)分光放射計

第1週目の「光と植物の成長」では、図-4(a)放射計測装置を用いて、ふく射伝熱の基礎、放射伝達用語と単位換算、放射強度の測定方法を理解する。第2週目の「植物の光学特性」では、図-4(b)分光放射計を用いて、太陽・蛍光灯・LEDのスペクトル特性、自然環境における植物の光学特性の計測と計算が理解する。第3週目の「植物の光合成機能の評価」では、「カレ・デ・ベール」を用いて光合成と呼

吸の基礎, 光合成速度と呼吸速度の測定方法, 光補償点, CO_2 補償点を理解する. 第 4 週目の「環境制御とエネルギー収支」では, 「カレ・デ・ベール」あるいは「カレ・デ・ベール plus」を用いて, 閉鎖環境をモニタリング・制御するために必要な空気調和の基礎とエネルギー収支の考え方を理解する.

表-1 「つながり工学演習」全体の授業計画

1週	光と植物の成長	よく射伝熱の基礎, 放射伝達の用語と単位換算, 放射強度の測定方法が理解できる
2週	植物の光学特性	太陽・蛍光灯・LEDのスペクトル特性, 自然環境における植物の光学特性の計測と計算が理解できる
3週	植物の光合成機能の評価	光合成と呼吸の基礎, 光合成速度と呼吸速度の測定方法, 光補償点, CO_2 補償点が理解できる.
4週	環境制御とエネルギー収支	閉鎖環境をモニタリング・制御するために必要な空気調和の基礎とエネルギー収支の考え方が理解できる
5週	衛星画像による植生モニタリング	衛星からのリモートセンシング技術と植生の基本特性(植生被覆, NDVI値)が理解できる.
6週	Webスクレイピングによる植物情報抽出	ウェブサイトから植物に関する情報を抽出するコンピュータソフトウェア技術が理解できる
7週	食品に含まれる生体内有用成分の機器分析	付加価値の高い食品生産に不可欠な必須アミノ酸やオメガ脂肪酸などをHPLC, GCを用いて分析する手法を学ぶ
8週	植物工場見学	前週までの基礎学習内容と実機の関連性について理解できる

4. 植物基礎実験

(1) 「光と植物の成長」実験⁵⁾

本実験では, 晴天時に屋外の日射量, 光量子量および照度を実際に測定することによって, それらの測定原理を理解し, 以下に示す物理量の関連性を理解する¹⁾.

- ① 日射量, 光合成光子フラックス密度 PPFD, 照度の関係
- ② 太陽高度と直達日射量および散乱日射量の関係
- ③ 地面上の放射収支

実験は, 図-5 に示すように, 約 10 人毎に図-4(a)放射計測装置 1 組を使用して測定した. 日射計(英弘精機 ML-01, 上向き用 1 台, 下向き用 1 台), 光量子計(英弘精機 ML-020P) 1 台, 照度計(英弘精機 ML-020S0) 1 台, 赤外線放射計(クリマテック CHF-IR02) 1 台, 棒状ガラス温度計 1 個, 熱電対 2 対, データロガー(日置電気 LR8431) 1 台, 長さ 30 cm の細棒の先端に直径 3-4cm の黒色球を取り付けたもの 1 個から構成されている. 太陽高度は, スマホにより CASIO アプリにアクセスして結果を得ている.



図-5 「光と植物の成長」の実験風景

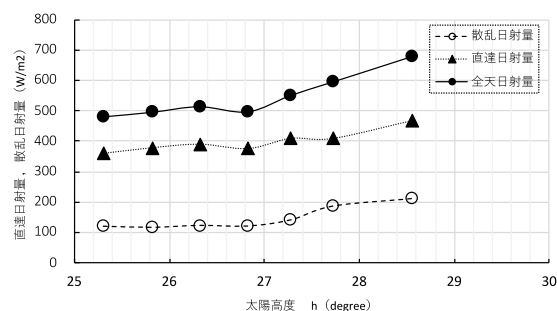


図-6(a) 太陽高度と全天, 直達, 散乱日射量の関係

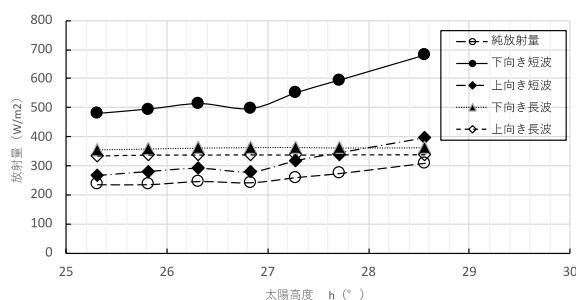


図-6(b) 太陽高度と純放射量の関係

図-6 は, 学生実験結果を示しており, 図-6(a) 太陽高度と全天, 直達, 散乱日射量の関係, 図-6(b) 太陽高度と純放射量の関係を示す. 学生は, 各種測定器の使用法 放射に関する専門用語, 太陽光の性質を通して, 太陽光が植物に与える影響を学習する²⁾.

(2) 「植物の光学特性」実験⁶⁾

光環境が植物におよぼす影響は, 大きく量的な影響と質的な影響の 2 つに分類される. 前者は主に光合成速度, ひいては植物の量的な成長への影響であり, 後者は主に植物の発芽や節間伸長, 開花などの形態への影響である. 本実験では, 光が植物におよぼす質的影響について実験を通じて, 以下に示す学習をする^{2) 3)}.

- ① 分光放射計による光合成有効放射, 光量子, 照度, 放射量の測定
- ② 太陽, 蛍光灯, LED の放射スペクトルの違い
- ③ 葉の光学特性, 波長による吸収率, 反射率, 透過率の違い
- ④ 緑色以外の植物(紅葉した葉など)の光学特性

実験は, 図-7 に示すように, 図-4(b)分光放射計(英弘精機 MS-720)を使用して, 観葉植物の 1 枚葉および群落(木幹の部分)の光学特性を測定した. 図-8(a)に 1 枚葉の波長と吸収率, 反射率, 透過率および図-8(b)群落(木幹の部分)のそれを示す.

図-9 は, 光源による放射スペクトルの違いの実験風景であり, 「カレ・デ・ベール(蛍光灯タイプ)」と「カレ・デ・

ベール (LED タイプ)」の光源下に分光放射計を設置して測定する。図-10 は、3 種光源の測定結果である。

これらの測定値から、光源による放射測定値の違いとして、赤色領域 (660nm) および遠赤色領域 (730nm) の放射量、光量子密度比と、フィクトクロムの光平衡 ϕ を算出する⁷⁾。



図-7 「植物の光学特性」の実験風景

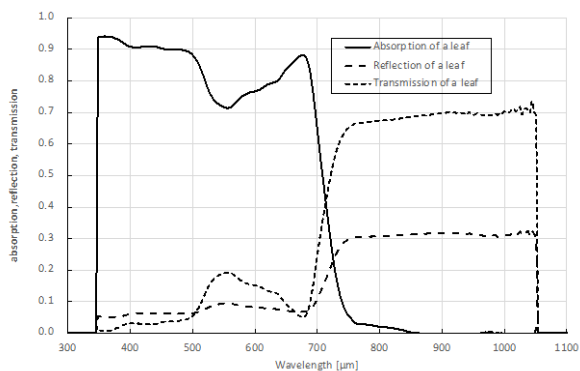


図-8(a) 1 枚葉の光学特性

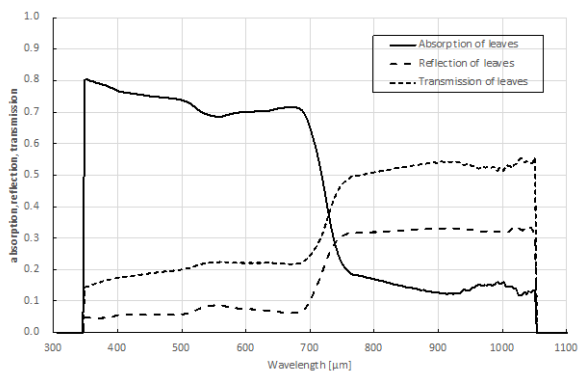


図-8(b) 群落葉の光学特性

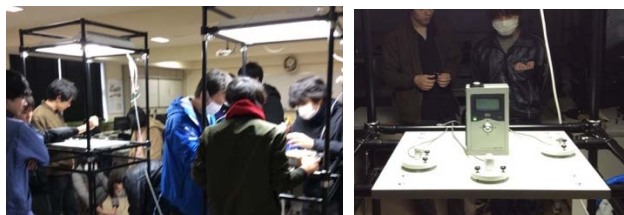


図-9 「蛍光灯と LED のスペクトル測定」の実験風景

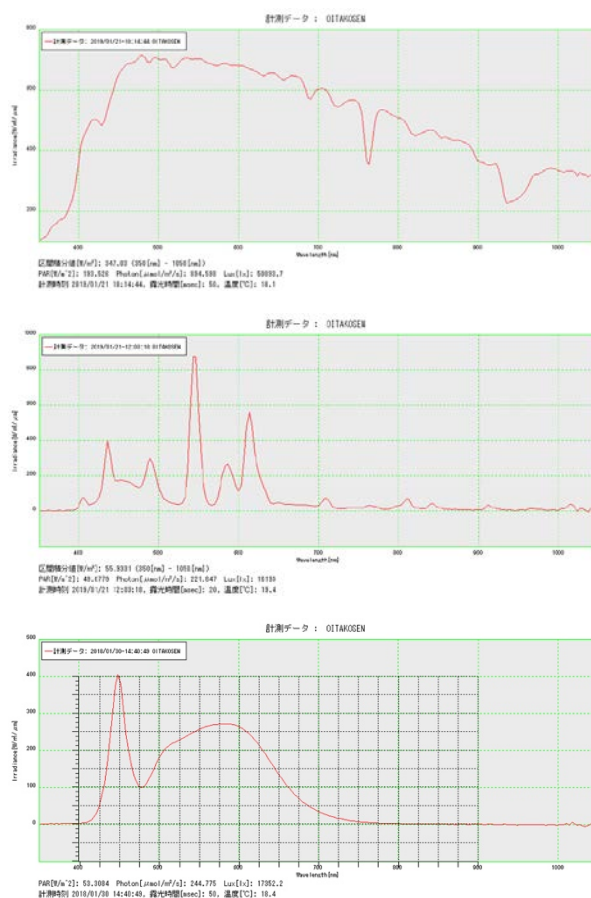


図-10 (a) 太陽光, (b) 蛍光灯, (c) LED のスペクトル

(3) 「植物の光合成機能の評価」実験⁸⁾

植物と大気との間において CO_2 や水蒸気などのガス成分は主に葉の気孔を介して交換されている。例えば CO_2 は、日中には光合成によって大気から葉内へ輸送され、夜間では呼吸によって葉内から大気へ輸送される。水蒸気は蒸散によって葉内から大気へ輸送される。このような葉内と大気との間におけるガスのやりとりをガス交換といい、葉内外のガス交換は拡散現象によって行われる⁴⁾。

本実験では、植物を入れた閉鎖容器内における CO_2 の収支から植物の CO_2 交換速度を求める方法を用いて、環境条件が異なる条件における大葉 (図-11) の光合成速度を評価する。



図-11 光合成実験に用いた大葉

図-12 は、「植物の光合成機能の評価」の実験風景を示す。「カレ・デ・パール」2 台用いて、1 台は太陽光と蛍光灯光源下における CO_2 濃度変化の測定、さらに 1 台は暗幕(暗条件)下における CO_2 濃度変化を測定する。



図-12 「植物の光合成機能の評価」の実験風景,
(a)太陽光, (b)暗幕(暗条件), (c)蛍光灯

図-13 は、チャンバー法における太陽光、暗幕および蛍光灯下における CO_2 濃度の経時変化を示す。図-14 には、3 条件の測定結果を使って、算出した光合成速度を示す。この図より高濃度 ($750\text{--}650\text{ }\mu\text{m}$) および通常濃度 ($400\text{--}300\text{ }\mu\text{m}$) の光合成速度の相違を確認する。

(4) 「環境制御とエネルギー収支」実験⁸⁾

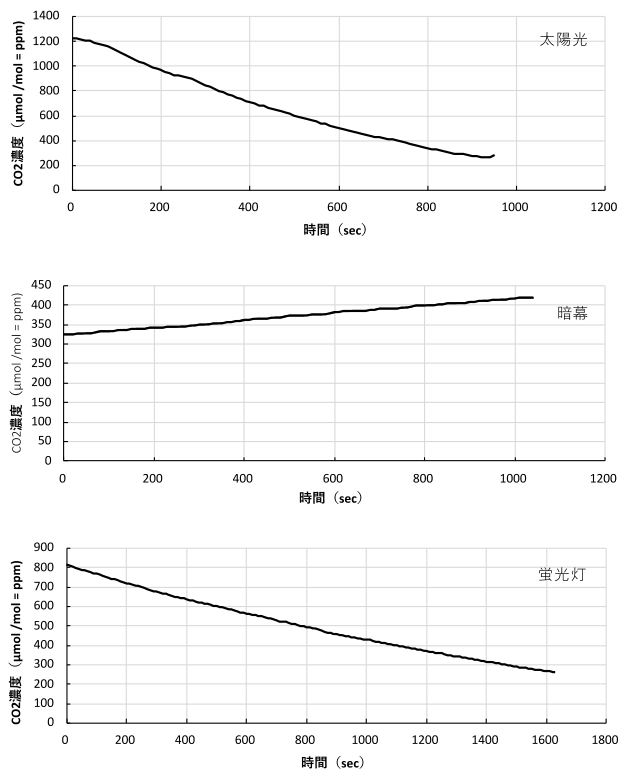


図-13 チャンバー法における CO_2 濃度の経時変化,
(a)太陽光, (b)暗幕, (c)蛍光灯

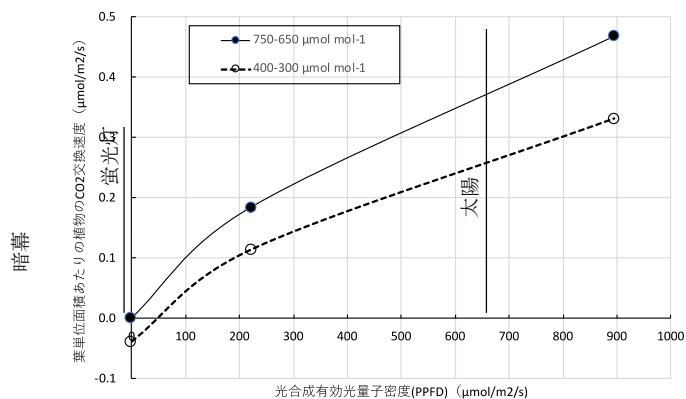


図-14 高濃度 ($750\text{--}650\text{ }\mu\text{m}$) および通常濃度 ($400\text{--}300\text{ }\mu\text{m}$) の光合成速度

植物には熱環境を緩和する効果がある。その仕組みを理解するには、植物とその周辺でどのように熱のやりとりが行われているかを考える必要がある。ある系に加えられた熱がどのような形でどこへ伝えられたかを示すものを熱収支といい、熱収支を明らかにすることは、その系における熱環境を理解する大きな助けになる。本実験では、通気システムに植物を入れて、微気象計測によるシステム内での熱収支を計測し、植物の蒸散による熱環境緩和効果を

評価する。以下の項目を学習する。

- ① 湿り空気の性質
- ② 絶対湿度 x , 相対湿度 ϕ , 比湿 q , 飽差 D
- ③ 顕熱, 潜熱, 通気システム内での熱収支

表-2 チャンバー入口・出口の温湿度

共試材料	時間 [min]	気温 T[°C]	相対湿度 RH[%]	飽和水蒸気 圧 e_s [hPa]	水蒸気圧 e [hPa]
砂	IN	23.4	46.1	28.78	13.27
	OUT	41.4	16.2	79.44	12.87
ペーパーパタオル	IN	23.7	47.2	29.31	13.83
	OUT	39.3	22.0	71.05	15.63
拭いた ペーパーパタオル	IN	23.6	46.2	29.13	13.46
	OUT	35.5	33.2	57.80	19.19
キュウリ	IN	25.1	52.5	31.87	16.73
	OUT	27.9	44.4	37.58	16.68

表-3 チャンバー入口・出口の比湿, 顕熱と潜熱

条件	潜熱を暖めるために使われた熱量			顕熱からの蓄熱に使用された熱量					合計熱量 J/s	熱緩和効果
	流入空気 の気温 [°C]	流出空気 の気温 [°C]	空気を暖 めるために 使われた 熱量 [J/s]	入口水蒸 気[hPa]	出口水蒸 気[hPa]	流入空気 の比湿 [kg/100kg]	流出空気 の比湿 [kg/100kg]	蓄熱に 使われた 熱量[J/s]		
カラ・デ・ベール	23.4	41.4	101.0	13.27	12.87	0.00819	0.00794	3.4	97.5	29.3
拭いたペーパー	23.7	39.3	87.5	13.83	15.63	0.00854	0.00965	15.6	103.1	5.6
拭いたペーパー が乾く	23.6	35.5	66.7	13.46	19.19	0.00830	0.01187	49.7	116.4	1.3
キュウリ	25.1	27.9	15.7	16.73	16.68	0.01034	0.01031	0.4	15.3	40.5

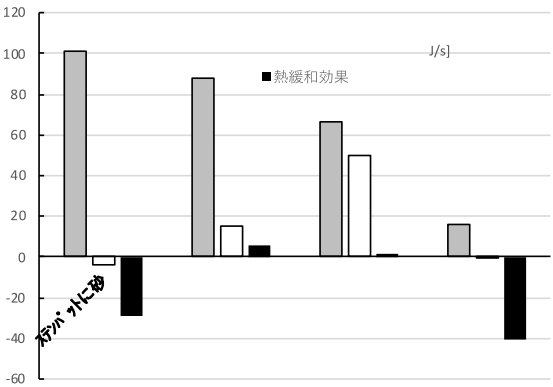


図-14 各種材料の顕熱, 潜熱, 熱緩和機能

実験は, 「カラ・デ・ベール」のチャンバー内に砂, ペーパーパタオルおよび植物を入れた 4 条件で行う。白熱灯 150W を点灯後のチャンバー入口と出口の温度, 湿度の経時変化を測定する。表-2 に, それぞれの条件の温度, 湿度の経時変化を示す。表-3 に, 比湿および顕熱, 潜熱の計算結果を示す。本実験結果では, 植物の状態があまり良くなかったため, 植物による熱緩和効果は見られなかった。

5. 植物工場見学

基礎学習内容と実機の関連性について理解を深めるために, 植物工場を見学する。見学候補として表-4 に示す施設がある。本候補から 1 施設を見学する。

表-4 植物工場の見学候補

名 称	方 式	作 物	規 模
アクア農園	日本式	レタス等	小規模
二宮農園	日本式	大葉	中規模
有限会社 スウェーデン ック久住	スウェーデン 式	ハーブ	中規模
農業生産法人 株式会社 リッチフィールド由布	オランダ式	パプリカ	大規模
愛彩ファーム九重	オランダ式	パプリカ	大規模

6. まとめ

本報告では, アグリエンジニアリング教育として, 専攻科 1 年生で実施する「つながり工学演習」と本演習の使用を目的として開発した植物基礎実験装置「カラ・デ・ベール」を紹介した。農学・生物系学科がない工学系の大分高専において, 植物を対象にした計測の実験及び生態データの解析をコンパクトにかつ能率的に収めた装置は, 利便性に富んでいる。また, 実験書は, 工学系学生が効果的に受講できるような計算に配慮している。本実験装置を含めた本教育カリキュラムの全国高専への普及と, 今後, 多くの修了生の輩出により我が国の農業を工業技術から支える人材が増え, 我が国農業のあり方が変わるものと期待する。

謝辞:

本実習の立案および実験, 実験書作成にあたっては, 著者の一人である大阪府立大学大学院 生命環境科学研究科 渋谷俊夫准教授のご有益なご議論ご助言を戴いた。特に, 「植物の光合成機能の評価」実験, 「環境制御とエネルギー収支」実験の実験書は, 渋谷准教授の作成された実験書に準じている。ここに感謝の意を表する。

本実習装置の開発は, 文部科学省の平成 29 年度「「KOSEN(高専)4.0」イニシアティブ」の「アグリエンジニアリング教育(研究)の導入」及び株式会社新興技術研究所の寄附金「新しい農業実習装置の調査研究に関する助成」によった。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 高木夏樹・高橋明宏・松崎賜：都城高専における農工学に関する実験教育，都城工業高等専門学校紀要，Vol. 53，pp. 29-34，2017.
- 2) 吉澤宜之，高橋徹，松本佳久，小西忠司，佐藤秀則，岡茂八郎，一宮一夫，穴井孝義，佐藤達郎，古川明德：我が国農業の将来を高専での工学教育が支える，大分工業高等専門学校紀要，Vol. 53，pp. 63-70，2017.
- 3) 高橋徹，菊川裕規，軽部周，衛藤賢一，高木浩一，濱田英介，中川裕子，古川明德：アグリエンジニアリング教育の展開-工学技術者のための農学概論-，大分工業高等専門学校紀要，Vol. 54，pp. 16-20，2017.
- 4) 高木浩一，高橋徹，濱田英介編著：工学技術者のための農学概論，理工図書，2018.
- 5) 渡部一郎編：「農業環境実験法」，サイエンスハウス，1987.
- 6) Hamlyn, G. J. : 植物と微気象(第 3 版) 植物生理生態学への定量的なアプローチ，久米篤ほか監訳，森北出版，2017.
- 7) Campbell, G. S. : 生物環境物理学の基礎 第 2 版，久米 篤ほか監訳，森北出版，2010.
- 8) 大阪府立大学大学院 生命環境科学研究科 渋谷俊夫准教授ホームページ，実験実習
http://envbio.envi.osakafu-u.ac.jp/lab_demonstration.
(2019 年 6 月 28 日アクセス)

(2019 年 9 月 30 日受理)

5軸マシニングセンタの回転軸角度誤差測定に関する研究

山本 通¹・西川 創太²

¹ 機械工学科, ² 機械・環境システム工学専攻

5軸マシニングセンタ（以下、5軸MCと言う）の精度測定方法については、さまざまな研究機関等が工作機械の形状創成理論に基づいて提案や報告を行っている。本研究では、より分かりやすい数学モデルを構築し、3つの方法で5軸マシニングセンタの回転軸の角度誤差を推定する。1つは工作機械メーカー等が行っているタッチプローブと球を使った手法、2つ目に多くの研究機関でも研究が行われているダブルボールバー（以下、DBBと言う）を用いる手法、3つ目にダイヤルゲージのような変位計を使って簡易的に測定する手法である。本稿では、これら3つの方法で得られた測定データを提案する数学モデルにより分析し、その特徴や課題について検証を行う。

キーワード：5軸マシニングセンタ, 数学モデル, 回転軸角度誤差, 精度測定

1. 緒言

リードタイムを短縮する手段として注目されている 5 軸マシニングセンタは回転軸が付加されたことで、問題も発生しており^{1,2)}, 5 軸マシニングセンタの精度測定に関して、さまざまな研究機関において提案や報告がなされている³⁻⁵⁾。例えば、ボールバー⁶⁾や球と変位計とを使った方法⁷⁾が開発され、その方法が ISO の規格原案として採用されるまでになっている。これらの方法は、切削をしないで精度を測定できる利点をもっているが、現状では高価な測定器が必要であるという課題がある。もし、機械加工の現場にある道具だけで機械の状態が評価できれば、現場の作業員でも容易に評価試験を実施することができるようになる。そこで、本研究では、現場でも理解しやすい数学モデルと現場でも使える測定方法を開発することを目的の一つとして研究を進めている。また、数学モデルが変わることで、他の研究機関で行われているダブルボールバー

での精度測定に関する式も変わるため、その分析方法についても新たな提案を行う。さらに、現在、工作機械メーカー等が提唱しオプションとして商品化もされているタッチプローブと球を使った手法も行い、提案した 3 つの方法での回転軸の角度誤差の測定結果を比較し、その特徴や課題について検証を行う。

2. 加工機と数学モデル

(1) 加工機

5 軸 MC の構造形態としては、主軸旋回形、テーブル旋回形と混合形の 3 種類の形態があることが知られている。このうち、最も多くの台数が出荷されているテーブル旋回形 5 軸 MC について本研究では、取り扱う。実験で使用した機械は、図 1 に示すような回転軸に A 軸と C 軸を有するタイプのテーブル旋回形 5 軸 MC である。

(2) 数学モデル

5 軸マシニングセンタの数学モデルとしては工作機械の形状創成理論⁸⁾を採用したものが多く見られる。しかし、各軸に座標系が定義されるため、現場で扱うには難解で理解しづらいという課題があるように思われる。

そこで、本研究では使用する座標系を一つにして、回転軸中心線を直線と考え、回転軸中心線の推定を行う。回転軸中心線は方向ベクトルと回転中心とで表し、単位方向ベクトル (a, b, c) 、回転中心 (Xc, Yc, Zc) の回転軸中心線

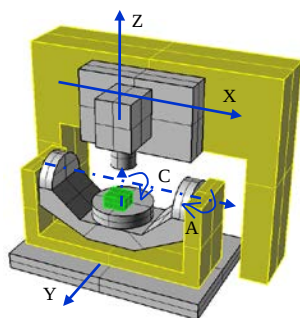


Fig.1 Schematic of the 5-axis machining center

の場合、6 個のパラメータを順に並べ、回転軸中心線パラメータが (a, b, c, X_c, Y_c, Z_c) であると表す。座標系は、設計上の C 軸回転中心を XY 原点、設計上の A 軸回転中心線が通る位置を Z 原点とした座標系のみの使用となる。例えば、テーブル上に定置された基準点 (X_0, Y_0, Z_0) を回転軸で角度 θ 回転させた点 (X_1, Y_1, Z_1) は式(1)で表現する。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} X_0 - X_c \\ Y_0 - Y_c \\ Z_0 - Z_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし $R(\theta)$ は式(2)で表現される回転変換行列である。

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} a^2 + (1-a^2)\cos\theta & ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & b^2 + (1-b^2)\cos\theta & bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta & c^2 + (1-c^2)\cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで回転軸中心線方向ベクトルを XY, XZ や YZ 平面に投影すれば、回転軸角度誤差は容易に求めることが可能である。そこで、本研究では回転軸中心線方向ベクトルを求めることと、回転軸角度誤差を求めることは同じとして扱う。

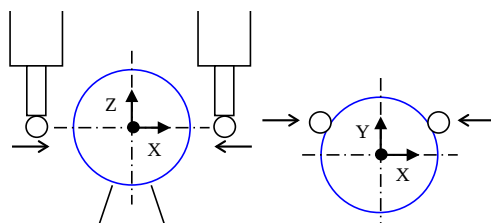


Fig. 2 Measurement method using probe

Table1 Measurement results using probe (A-axis)

Axis	Center point		
	X mm	Y mm	Z mm
A0C0	2.102	182.635	15.297
A19.9C0	2.103	187.153	-49.554
A-20C0	2.103	156.133	75.008
A-60C0	2.102	52.117	150.76
A-100C0	2.104	-76.262	141.925

Table2 Measurement results using probe (C-axis)

Axis	Center point		
	X mm	Y mm	Z mm
A0C0	2.102	182.634	15.297
A0C90	182.641	-2.131	15.316
A0C180	-2.12	-182.665	15.327
A0C270	-182.661	2.101	15.309

Table 3 Estimation results using probe measurement results

Axis	Directional vector		
	X mm	Y mm	Z mm
A-axis	1000.000	0.0095	0.0088
C-axis	-0.0182	0.0823	1000.000

3. タッチプローブによる回転軸角度誤差の推定

(1) タッチプローブによる測定方法

最近の 5 軸 MC には、オプションとしてタッチプローブ、球と測定用ソフトウェアが搭載された工作機械があり、扱いやすくなっている。実験に使用した 5 軸 MC にも上記のようなソフトウェアが搭載されていたが、誤差が工作機械の形状創生理論に沿った定義になっており、本研究の数学モデルと異なっていたため、測定用プログラムを自作し、測定を行った。A 軸 0 度、C 軸 0 度時に基準球をテーブル上に設置し、図 2 に示すような方法で球の中心点を測定後、回転軸を任意位置に位置決めし、それぞれの位置での球中心を測定した。A 軸のみを動作させて基準球中心の測定を行った結果を表 1 に、C 軸のみを動作させて測定した結果を表 2 に示す。なお、本稿では、A 軸 0 度 C 軸 0 度のような回転軸の位置決め状態を A0C0 のように簡略表記する。

(2) タッチプローブ測定結果からの回転軸角度誤差推定

n 回、回転角度を変えながら、球中心を測定したときの i 番目の測定データを (X_i, Y_i, Z_i) とすると、最小二乗平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線ベクトル (a, b, c) は式(3)を解いて (a, b, c) を求め、式(4)に代入し求めることができる。

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i Y_i & \sum_{i=1}^n X_i Z_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i & \sum_{i=1}^n Y_i^2 & \sum_{i=1}^n Y_i Z_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Z_i & \sum_{i=1}^n Y_i Z_i & \sum_{i=1}^n Z_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Z_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

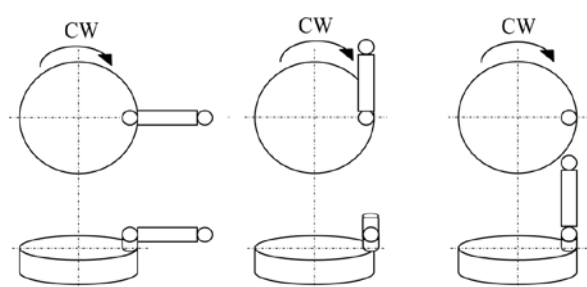
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a_a^2 + b_b^2 + c_c^2}} \begin{bmatrix} a_a \\ b_b \\ c_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

表 1 と表 2 に示す結果を上式に代入し、導出した A 軸と C 軸の回転軸中心線方向ベクトルの推定結果を表 3 に示す。

4. DBB による回転軸角度誤差の推定

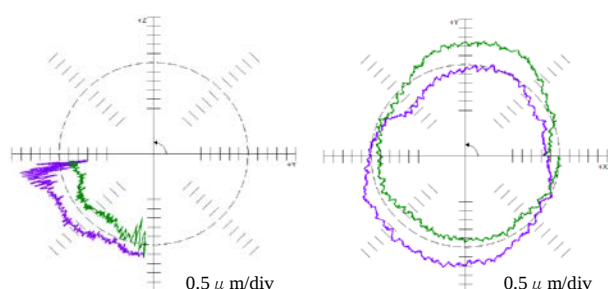
(1) DBB による測定方法

DBB を使って 5 軸 MC の精度を確認する方法として、堤らが提案した図 3 に示すような 3 種類の測定方法(軸方向、半径方向、接戦方向の測定)⁹⁾がある。このうち、ボールバーの感度方向について考慮すると、回転軸の角度誤差を確認するには軸方向の測定を行えばよいと考えられる。そこで、ボールバー長さ 100 mm で図 3(c) に示すような軸方向測定を行い、DBB に付属のソフトウェアで表示した結果が図 4 である。ここで、ボールバーに付属のソフトウェア



(a) Radial direction (b) Tangential direction (c) Axial direction

Fig. 3 Measurement method using DBB



(a) A-axis axial direction (b) C-axis axial direction

Fig. 4 Measurement result using DBB

Table 4 Estimation results using DBB measurement results

Axis	Directional vector		
	X mm	Y mm	Z mm
A-axis	999.9999	-0.2687	0.2587
C-axis	0.0203	0.1005	1000.0000

は直進軸を対象とした機能となっている。したがって、図 4 に示すように真円度等の結果から何らかの誤差の有無は確認できるが、どのような誤差が含まれているかまでは検証できない。なお、段取り上の理由で、A 軸測定時はテーブル側球と A 軸中心の距離は 19.021mm、C 軸測定時はテーブル側球と C 軸中心は 150.000mm となるようにテーブル側球を設置して測定を行った。

(2) DBB 測定結果からの回転軸角度誤差推定

前述した方法で測定を行うことでボールバーのシステムは、ボールバーの伸縮量をテキストデータで保持している。ここで、例えば C 軸軸方向の測定について考えると、XY 軸と C 軸が同期して動くわけだが、XY 方向の誤差はボールバーの伸縮量にはほとんど影響を与えない。そこで、プログラムで指令した主軸の位置から軸方向にボールバーの長さ分、下がった位置がテーブル側球の位置と考えると、仮想的なテーブル側球の中心が描く軌跡を得ることができる。つまり、この軌跡でできる最小二乗平面の法線ベクトルが C 軸中心線方向ベクトルと考えることができ、測定データを式(3)と(4)に代入すれば、C 軸中心線方向ベクトルを求めることができる。同様の考え方をすれば、A 軸

中心線方向ベクトルも求めることができる。以上の手順で求めた A 軸と C 軸の回転軸中心線方向ベクトルを表 4 に示す。

5. 変位計による回転軸角度誤差の推定

(1) 変位計による測定方法

本研究では、変位計としてダイヤルゲージを使用する。ダイヤルゲージが加工現場に必ずある測定器で、手軽に使えることが、その理由である。提案する測定方法も非常に手軽なことが特徴の 1 つである。例えば、C 軸中心線方向ベクトルを知るには C0 時と C180 時にそれぞれ、基準面から 3 点を測定し、測定結果を用意したエクセルシートなどに入力するだけである。ここで、5 軸 MC に付加された回転 2 軸のうち、一般的に 1 つの軸は 360 度以上の回転ストロークを有する。一方、残り 1 つの軸は、構造上、360 度未満の回転ストロークとなる。本研究に用いた 5 軸 MC でも C 軸は 360 度の回転が可能だが、A 軸は 130 度の回転範囲しか有していない。そこで、以下の 2 通りの測定方法を考え、それぞれの軸の方向ベクトルを導出する。

まず C 軸について考えると、180 度の回転が可能であるため、式(2)の θ に 180 度を代入する。ここで、C0 時に測定した 3 点から構成される基準面の法線ベクトルを (a_1, b_1, c_1) 、C180 時に測定した 3 点から構成される基準面の法線ベクトルを (a_2, b_2, c_2) とすると、式(5)が成り立つ。これを解くと、式(6)、(7)と(8)を導出でき、これらの式に C0 時と C180 時の基準面の法線ベクトルを代入すれば、C 軸中心線方向ベクトル (C_a, C_b, C_c) を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = R(180) \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$c_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b_1 + b_2)^2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{(c_1 + c_2)^2}{(a_1 + a_2)^2}}} \quad (6)$$

$$c_b = \left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \right) c_a \quad (7)$$

$$c_c = \left(\frac{c_1 + c_2}{a_1 + a_2} \right) c_a \quad (8)$$

一方、A 軸は A0 と A-90 時の基準面の法線ベクトルを使用する。A0 時に測定した 3 点から構成される基準面の法線ベクトルを (a_3, b_3, c_3) 、A-90 時に測定した 3 点から構成される基準面の法線ベクトルを (a_4, b_4, c_4) とすると、式(9)が成り立つ。これを解くと、式(10)、(11)と(12)を導出でき、これらの式に A0 時と A-90 時の平面の法線ベクトルを代入すれば、A 軸中心線方向ベクトル (A_a, A_b, A_c) を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} = R(-90) \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A_a = \frac{-2(b_3c_4 - b_4c_3) \pm \sqrt{XX}}{(a_3 + a_4)^2 + (b_3 + b_4)^2 + (a_1 + a_2)^2} \quad (10)$$

$$A_b = \frac{A_a(b_3 + b_4) - c_3 + c_4}{a_3 + a_4} \quad (11)$$

$$A_c = \frac{A_a(c_3 + c_4) + b_3 - b_4}{a_3 + a_4} \quad (12)$$

ただし、式(10)のXXは以下となる。

$$XX = 4(b_3b_3 - b_3b_3)^2 - ((a_3 + a_4)^2 + (b_3 + b_3)^2 + (b_3 + b_3)^2) \times ((a_3 + a_4)^2 + (b_3 + b_3)^2 + (b_3 + b_3)^2)$$

(2) 変位計測定結果からの回転軸角度誤差推定

前節で提案した方法で C 軸中心線方向ベクトルを求めるために 5 軸 MC のテーブル面を測定した結果を表 5 に示す。Position1, 2 と 3 は A0C0 時のテーブル面 3 点の座標値で、Position4, 5 と 6 は A0C180 時のテーブル面 3 点の座標値である。この測定結果を使い、A0C0 時と A0C180 時のテーブル面の法線ベクトルを求め、式(6)、(7)と(8)に代入し、導出した C 軸中心線方向ベクトルを表 7 の下段に示す。一方、A 軸中心線方向ベクトルを求めるためにテーブル面を測定した結果を表 6 に示す。Position7, 8 と 9 は A-90C0 時のテーブル面 3 点の座標値である。この結果と表 5 に示す A0C0 時のテーブル面 3 点の座標値を使い、A0C0 時と A-90C0 時のテーブル面の法線ベクトルを求め、式(10)、(11)と(12)に代入し、A 軸中心線方向ベクトルを求めようとしたが、式(10)の XX が負になり、解なしという結果となった。

Table5 Measurement results using dial gauge (C-axis)

Position number	Measure point		
	X mm	Y mm	Z mm
Position 1	124.244	-150.444	0
Position 2	-71.956	-174.844	-0.001
Position 3	162.142	69.082	-0.023
Position 4	162.142	-98.368	0
Position 5	168.135	69.082	-0.021
Position 6	-58.305	-170.678	-0.004

Table6 Measurement results using dial gauge (A-axis)

Position number	Measure point		
	X mm	Y mm	Z mm
Position 7	-152.134	0	118.3
Position 8	124.378	0.001	151.106
Position 9	178.473	-0.009	40.748

Table7 Estimation results using dial gauge measurement results

Axis	Directional vector		
	X mm	Y mm	Z mm
A-axis	—	—	—
C-axis	-0.0393	0.1178	1000.0000

6. 結言

本研究では、5 軸 MC の回転軸角度誤差について、3 つの方法で推定したが、推定結果が異なることが分かった。それぞれについて得られた知見等を以下に示す。

1) タッチプローブで角度誤差を推定する方法は、測定時に測定対象物である基準球を静止させている。直進軸の精度に問題がなければ、タッチプローブの測定精度を考慮すると正確に各回転角度での基準球中心を測定(XYZ の位置情報を取得)できると思われる。したがって、今回の推定方法の中では、最も真の値に近い値を安定して得られることができると考えられる。しかし、自動測定機能が搭載された工作機械のみでしか適用できない課題がある。

2) DBB による推定結果とタッチプローブでの推定結果とを比較すると、無視できないほどの相違がある。DBB 測定ではバーの伸縮量しか情報がなく、回転軸と直進軸の同期時に意図しない誤差が含まれる可能性もある。そのため、タッチプローブによる推定と比べて、大きな相違が出たものと思われる。推定方法が複雑にはなるが、軸方向の測定だけでなく、他の測定方法と組み合わせる推定すれば、更なる精度向上も期待できる。また、DBB を所有していないと測定ができない課題もある。

3) 変位計による推定方法は一見、複雑な式が並んでいるが、9 点を測定し、容易したエクセルシート等に測定値を入れるだけなので、現場にある測定器で手軽に回転軸中心線方向ベクトルを推定できるメリットがある。C 軸中心線方向ベクトルについてはタッチプローブで推定した値と誤差の方向は同じになっており、現場で使える可能性がある。しかし、A 軸中心線方向ベクトルの測定では式(10)を解くと、解なしや解が 2 つ求まるという結果になり、その解を得るのに混乱する恐れがある。A 軸中心線方向ベクトルの推定方法については、さらなる検討が必要である。

参考文献

- 1) 前島規克, 荒居祐紀, 堤正臣, 小林献臣: タッチプローブを用いた傾斜円テーブルの位置決め精度補正方法の開発, 2013 年度精密工学会春季大会講演論文集, pp. 67-68, 2013.
- 2) 林晃生, 井上雄太, 佐藤隆太, 白瀬敬一: 数値制御工作機械送り駆動系の消費エネルギーに基づく工具経路評価, 精密工学会誌, 80, 7, pp. 699-704, 2014.
- 3) 松下哲也, 沖忠洋, 松原厚: テーブルチルト形 5 軸制御工作機械によるテーパコーン加工精度, 精密工学会

- 誌, 74, 6, pp.632-636, 2008.
- 4) 内海敬三, 小杉達寛, 齋藤明德, 堤正臣: 5 軸制御マシニングセンタの静的精度測定方法(基準球と変位計を用いた測定方法), 日本機械学会論文集(C 編), 72, 719, pp.2293-2298, 2006.
- 5) NAS 979, Uniform cutting tests - NAS series, metal cutting equipment specifications, 1969.
- 6) 垣野義昭, 井原之敏, 佐藤浩毅, 大坪寿: NC 工作機械の運動精度に関する研究(第 7 報) - DBB 法による 5 軸制御工作機械の運動精度の測定 -, 精密工学会誌, 60, 5, pp.718-722, 1994.
- 7) S. Weikert: R-Test, a New Device for Accuracy Measurements on Five Axis Machine Tools, CIRP Annals - Manufacturing Technology, 53, 1, pp.429-432, 2004.
- 8) 稲崎一郎, 岸浪建史, 坂本重彦, 杉村延広, 竹内芳美, 田中文基: 工作機械の形状創成理論 - その基礎と応用 -, (株)養賢堂, 1997.
- 9) 齋藤明德, 堤正臣, 牛久健太郎: 5 軸制御マシニングセンタのキャリブレーション方法に関する研究(第 2 報) - 同時 3 軸制御運動を用いた位置偏差および角度偏差の推定 -, 精密工学会誌, 69, 2, pp.268-273, 2003.

(2019. 9. 30 受付)

仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法 に設定する最適な仮想ばね定数の値について (その1) — 中心軸圧縮力を受ける均質な等断面長柱の線形座屈問題 —

名木野 晴暢^{1†}・山本 寧音²・足立 忠晴³

¹都市・環境工学科, ²長岡技術科学大学大学院, ³豊橋技術科学大学

†連絡著者 / Corresponding author (E-mail: nagino@oita-ct.ac.jp)

本稿では, 線形化された梁-柱理論に従う中心軸圧縮力を受ける均質かつ真つすぐな長柱の線形座屈問題を仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法により解析し, 分岐座屈荷重の精度, spline次数, 解析領域内に配置するノットの数, 仮想ばね定数の値および支持条件の関係を詳細に調査した. 数値的に安定し, 近似解に影響を与えない範囲の無次元仮想ばね定数の最大値は, 鉛直ばねおよび回転ばね共に 10^{10} であった. この仮想ばね定数値を用いて, spline次数を5次, ノット数を41に設定したときの本手法の座屈荷重は, 支持条件にかかわらず有効桁数九桁で収束した値が得られた. また, その収束値は有効桁数八桁から九桁まで本問題の強形式の厳密解に一致するという高い解析精度を示した.

キーワード: Ritz法, 正規化されたB-spline基底関数, 仮想ばね法,
線形座屈問題, 中心軸圧縮力, 線形化された梁-柱理論

1. 緒 言

本稿は, 線形化された梁-柱理論¹⁾に従う中心軸圧縮力を受ける均質かつ真つすぐな長柱の線形座屈問題を仮想ばね法により基本境界条件 (変位の境界条件またはDirichlet条件) を緩和させたB-spline Ritz法 (以下, 本手法と略す) により解析し, 座屈荷重の精度, 離散化条件, 仮想ばね定数の値および支持条件の四者の関係を調べ, その情報を提供するものである. 本調査は, 著者らが着手している軸方向傾斜機能材料 (Axially Functionally Graded Materials: AFGMs) の力学的特性に関する研究²⁾⁻⁵⁾において, 変数係数を有する四階線型の齊次常微分方程式の境界値問題 (強形式) を精度良く解くための離散化手法を確立させる過程³⁾で実施した. この研究の背景や目的などについては, 文献²⁾を参照されたい.

2. B-spline Ritz法

(1) Ritz法

Rayleigh-Ritz法⁶⁾ (以下, Ritz法と略す) は, 1877年にLord Rayleighが Theory of Sound で提唱したRayleigh法 (連続的

な物体の基本振動数の近似値を算定する方法) を, 1908年にWalther Ritzが一般化した変分原理に基づく近似解析手法である. Ritz法は, 対象としている問題の強形式の正解 (厳密解) を探す代わりに強形式をこれと等価な汎関数の停留値問題に置き換え, この問題の変関数の正解を幾つかの既知関数の線形結合によって近似し, 各関数の重み係数を汎関数の停留条件から決定することで変分問題の近似解を得る離散化手法である. Ritz解は強形式の厳密解に要請される事項の幾つかを満足しない弱解である. Ritz法には, 次のような特色がある⁷⁾.

- 定式化が容易である.
- 汎関数の変関数の近似に許容な試行関数を構成できればよく, 自然境界条件の処理は自動的に, 無造作に実行される. なお, この条件は近似的に満足される.
- 強形式を汎関数の停留値問題に表現し直せるとき, Ritz法により得られる近似解はある意味で厳密解の最良近似となる.
- 一般的な問題に適用できる重み付き残差法に対して, Ritz法の適用は対象としている問題の強形式を汎関数の停留値問題に置き換えられるときに限定される.
- 長方形領域などの問題には適用しやすいが, 境界の形状が複雑になると, 基本境界条件を満足する近似関数

の構成が困難になる。

なお、強形式の厳密解や汎関数の停留関数の自由度は、一般に無限大である。これに対してRitz法は、無限の自由度を有する正解を有限の自由度で近似する。この“自由度を有限個に減じること”は、幾何学的拘束を余分に加えることに相当する⁸⁾。

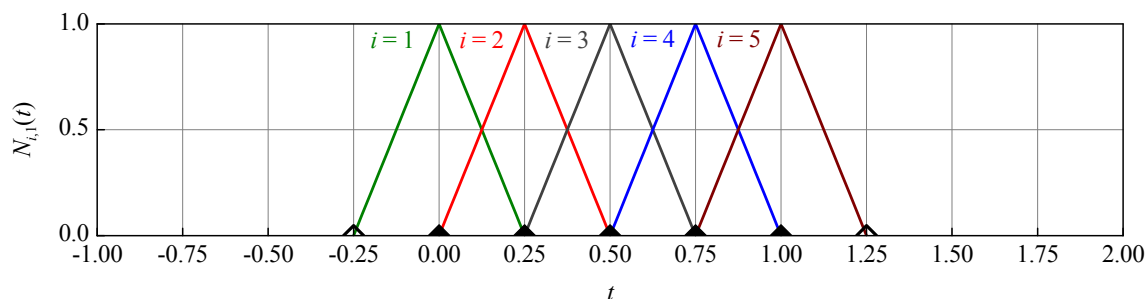
Ritz法では、汎関数の変関数を“許容である試行関数”により近似する。ここで、許容である関数とは、次の二つの条件を満足する関数のことをいう。

- [1] 近似関数は、汎関数に要求される最も高次の導関数まで微分可能、かつ連続でなければならない。
- [2] 近似関数は、基本境界条件を満足していなければならない。

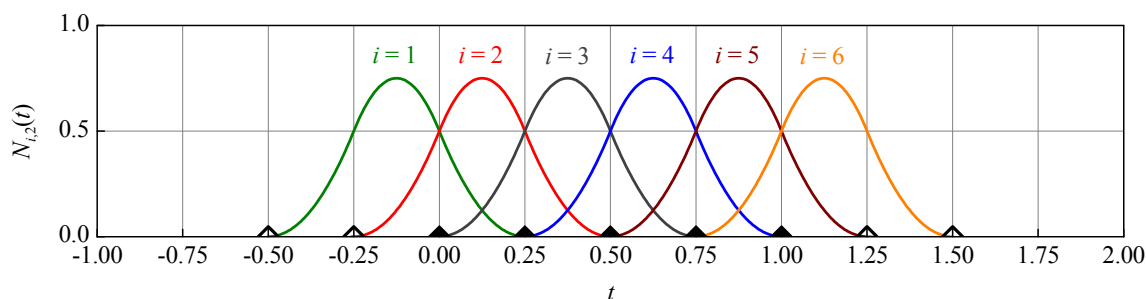
ただし、Weierstrassの定理およびDu Bois-Reymondsの定理によれば、一般に汎関数に高階の導関数が含まれていても、導関数の区分的な連続性だけを仮定すれば、許容される関数の条件を満たす⁹⁾。試行関数は、一般に線形独立な既知の基底関数（座標関数） $\phi(x)$ の線形結合により表されることが多い。特に、一次元問題を対象とすれば、汎関数 Π の変関数を近似する許容な試行関数 $f(x)$ は、次のように仮定される^{8), 10), 11)}。

$$f(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x). \quad (1)$$

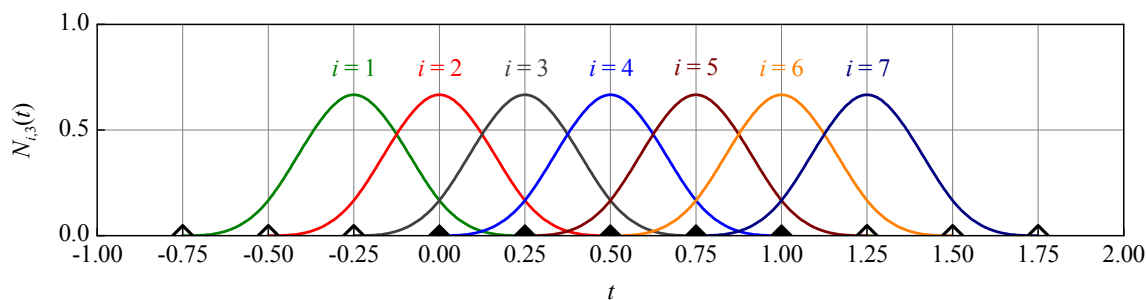
ここで、 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ は、各基底関数の影響度を表す重み係数（展開係数）である。 $\phi(x)$ は、境界での基本境界条



(a) 一次の正規化されたB-spline基底関数 $N_{i,1}(t)$; $p=1, m_{\text{in}}=5, n_{\text{CP}}=5, t = \{-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$



(b) 二次の正規化されたB-spline基底関数 $N_{i,2}(t)$; $p=2, m_{\text{in}}=5, n_{\text{CP}}=6, t = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\}$



(c) 三次の正規化されたB-spline基底関数 $N_{i,3}(t)$; $p=3, m_{\text{in}}=5, n_{\text{CP}}=7, t = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}\}$

図-1 次数 p の正規化されたB-spline基底関数 $N_{i,p}(t)$

件を満足するように適当に設定する。他方、 n 個の基底関数 $\phi(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$)は、境界で斉次の基本境界条件を満足し、かつ汎関数の中に現れる導関数の最高階数まで微分可能な連続関数を選ぶ。このとき、近似された系の汎関数 $\Pi(f)$ は展開係数 a_i の関数でもあるので、汎関数の停留条件は、

$$\delta \Pi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} \delta a_i = 0. \quad (2)$$

ここで、 δa_i は展開係数 a_i の変分である。これは任意であることから、次の n 元連立代数方程式を得る。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

よって、式(3)の n 元連立代数方程式を解けば展開係数 a_i が求められ、式(1)の近似関数が決定する。なお、仮定する近似関数は許容されるものであり、かつ n 個の基底関数列 $\phi(x)$ が完備であれば、 $n \rightarrow \infty$ としたときの極限において、試行関数 $f(x)$ はエネルギーの意味において考えている問題の正解に収束する¹⁰⁾。

(2) B-spline Ritz法

Ritz法の近似解の精度は、式(1)の $\phi(x)$ と n 個の基底関数 $\phi(x)$ の選択が重要な鍵となる。B-spline Ritz法^{12), 13)}は、弾性問題の強形式を汎関数の停留値問題に変換したときの変関数(未知の変位)に正規化されたB-spline基底関数(以下、正規化されたを省略する)と重み係数の積の線形結合で近似したRitz法である。Spline関数は、多項式を何らかの連続条件を満たすように接続した区分的な多項式である。B-spline基底関数は、spline関数を局所的な台を持つ基底によって表現したものである。文献11)と文献12)では、単純ノットベクトル $\mathbf{t}$ からなるB-spline基底関数を近似関数に選択している。パラメータ領域 $[0, 1]$ の内部に設定するノットの数 m を5に固定し、単純ノットベクトル $\mathbf{t}$ からなる次数 p のB-spline基底関数 $N_{i,p}(t)$ を図-1に示した。ここで、 t はパラメータ、 t_i は非減少の実数の列で定義されるノットであり、 n_{cp} は基底関数の数である。領域 $[0, 1]$ の左右の外側にあるノットは付加ノットであり、これに該当するノットベクトル $\mathbf{t}$ の成分には下線を付した。Ritz法の近似関数は、基本境界条件を満足するように選ばなければならないが、図-1の基底関数は次数 p に関係なく境界 ($t=0$ と $t=1$) で斉次の基本境界条件を満足しないことがわかる。ただし、図-1(a)の基本境界条件の処理は容易である。他方、図-1(b)と(c)は、パラメータ t の境界 ($t=0$ と $t=1$) で有限の値を持つ基底関数が p 個だけ存在するため、基本境界条件の処理は容易でない。このような近似関数を試行関数に選択するときは、Lagrangeの未定乗数法^{14) - 16)}により基本境界条件を付帯条件とした変分原理で表現するか、または仮想ばね法^{12), 13), 17) - 19)} (penalty関数法)により基本境界条件を緩和させた変分原理で表現するか、に大別される。前者によれば、付帯する

基本境界条件を正確に満足させることができる。しかし、基本境界条件の数、すなわち、Lagrangeの未定乗数の数だけ未知量が増大する。また、係数行列の対角要素に零が入るので正定値行列を前提としたソルバーを使うことができない¹¹⁾。後者は、前者と異なり未知量の数は変化せず、係数行列の正定値行列も保たれる。また、数学的には、仮想ばね定数の値 (penalty数) を無限大にすると変位は拘束され、その値を零にすれば自由表面となる^{12), 13), 17) - 19)}。しかし、数値計算においては無限大を数値として取り扱うことができないため、解に影響を与えない範囲の最大値を設定することになる。その為、数値解析に用いる仮想ばね定数の値は、事前に、試行錯誤的に求めておかなければならない。文献12)と文献13)は、仮想ばね法により斉次の基本境界条件を近似的に満足させているが、精度の高い近似解が得られている。

(3) Ritz法、B-spline Ritz法と有限要素法の関係

有限要素法は、偏微分方程式の初期値境界値問題の近似解を得るための強力な離散化手法の一つである。これとRitz法およびB-spline Ritz法との関係を簡単に述べておく。

一般に、領域 Ω の全体に既知の基底 (全体基底関数) を張ったものをRitz法と呼び、領域 Ω を幾つかの小領域 Ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) の集合とし、その各小領域 Ω_i に比較的低次の基底 (局所基底関数) を張ったものを有限要素法と呼んでいる。Ritz法は、領域 Ω を一つの要素とした有限要素法と解釈することもでき、有限要素法はRitz法の基底関数の選択を工夫したものに相当する。B-spline Ritz法は局所基底を張るので、分類としては有限要素法に近く、一次のB-spline基底を張ったときは、一次の有限要素に一致する。しかし、B-spline基底関数の有する高次の導関数までの連続性から、二次以上のB-spline基底を領域 Ω に張ると、一次のB-spline基底と異なり必ずしも領域 Ω を小領域 Ω_i (要素) に“分割”しているとは言い難い。よって、B-spline Ritz法は、Ritz法と有限要素法の両方の特徴を有する離散化手法であると考えられる。また、有限の多項式によるパラメータ表示によって物体の形状を正確に表現できないものを除けば、isogeometric写像^{20), 21)}も可能であると思われる。

3. 数学モデル (強形式)

(1) 座標系と仮定

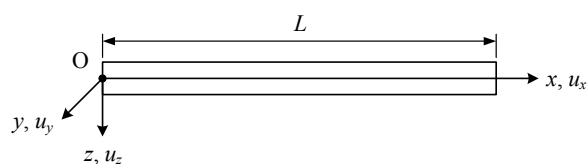


図-2 直線直交座標系O-xyzと細長い線部材

図-2に示すような右手直交直線座標系 $O-xyz$ にある真っ直ぐな細長い線部材（以下、長柱と略す）の中心軸圧縮力による分岐座屈問題を考える。図-2の $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ は、それぞれ、長柱の x, y, z 方向の変位を意味する。 L は柱の長さであり、これは yz 断面の寸法の長さに比べて卓越しているとする。また、長柱は x 軸方向に一様断面とし、かつ同方向に均質な材料からなるとする。 y 軸と z 軸は、長柱の yz 断面の図心を通るように設定する。これにより、 y 軸は中立軸となる。 x 軸は、 yz 断面の図心を通るように設定する（これを軸線と呼ぶ）。断面諸量として、 yz 断面の断面積を A 、中立軸に関する断面二次モーメントを I で表す（正しくは I_y である）。

本稿では、長柱の端部($x=L$)に中心軸圧縮力が作用し、これにより端部が x 軸方向に u_L だけ圧縮変位してつり合っている系から、軸圧縮力の増加にともない長柱が僅かに y 軸まわりに曲げ変形を生じてつり合った系を考える。この不安定現象の数学モデルには、線形化された梁-柱理論¹⁾を用いる。これは、以下の仮定により構築される。

- [1] 長柱の変位は、微小ひずみ、かつ微小回転とし、線形化された有限変位理論に従う。
- [2] 変形前に軸線（ x 軸）に垂直であった断面は、曲げ座屈変形後も軸線に垂直であるとする（Bernoulli-Eulerの仮定）。
- [3] 曲げ座屈変形後の断面形状不変を仮定する。
- [4] 材料の構成則は、一軸応力状態のHookeの法則に従う。ここで、[2]の仮定は断面のゆがみの原因であるせん断変形を考慮しないためのものであり、 xz 面の面外せん断ひずみ $\gamma_{xz}=0$ 、かつ xy 面の面内せん断ひずみ $\gamma_{xy}=0$ であることを意味している。また、[3]の仮定は、 y 軸方向の垂直ひずみ $\epsilon_{yy}=0$ 、 z 軸方向の垂直ひずみ $\epsilon_{zz}=0$ 、および yz 面の面外せん断ひずみ $\gamma_{yz}=0$ であることに相当する。この仮定に従う長柱の変形は、垂直ひずみによる長柱の伸縮の影響、変位による長柱の回転の有限性、および曲げ変形による部材軸力の変化の影響を無視した範囲に限定される¹⁾。

(2) 変位場とひずみ場

(1)の座標系と仮定に基づくとき、運動学的に許容される長柱の任意の点 (x, y, z) の変位 $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ は、それぞれ、次式のように表すことができる。

$$u_x(x, y, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx}, \quad (4a)$$

$$u_y(x, y, z) = 0, \quad (4b)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x). \quad (4c)$$

ここで、 $u(x)$, $w(x)$ は、それぞれ、断面の軸線 $(x, 0, 0)$ における x, z 方向の並進変位であり、これらは独立した未知関数である。以降、 $u(x)$ を軸変位、 $w(x)$ を面外変位と呼ぶ。ま

た、 (dw/dx) は曲げたわみ曲線 $w(x)$ の接線と軸線とがなす角を表すたわみ角であり、微小角 $(|\theta| \ll 1)$ とすることで、次式のように表すことができる。

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (5)$$

梁-柱理論のひずみ-変位の関係式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} \\ &= \epsilon_0(x) + z\kappa_0(x) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

$$\epsilon_0(x) = \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dw(x)}{dx} \right]^2, \quad (7)$$

$$\kappa_0(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (8)$$

であり、 $\epsilon_0(x)$ は軸線方向の伸縮ひずみであり、 $\kappa_0(x)$ は僅かに曲がった長柱の断面の曲率を表している。

(3) 一般化応力の平衡方程式と境界条件式

中心軸圧縮力 P を受ける長柱が僅かに曲げ変形を生じてつり合ったとき、長柱のある点の近傍における局所的な力のつり合いを考える。領域 $\Omega = (0, L)$ にある長柱の任意の点の近傍の微小な線分要素における x 軸方向と z 軸方向の力のつり合い条件式、および xz 平面内の任意の点に関する力のモーメントのつり合い条件式は、それぞれ、次のように表される。

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ S(x) + N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right\} = 0, \quad (9b)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} - S(x) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (9c)$$

ここで、 $N(x)$ は僅かに曲がった長柱の断面の法線方向に生じる軸力、 $S(x)$ は同断面の接線方向に生じるせん断力であり、 $M(x)$ は y 軸まわりの曲げモーメントである（正しくは M_y である）。これらは、 yz 断面に分布する垂直応力とせん断応力を軸線に関する一般化応力（断面力）として表したものである。式(9b)の下線部の項は、軸力 $N(x)$ が影響する非線形項である。この項を無視すると、式(9b)は初等梁理論の z 軸方向の力のつり合い条件式に一致する。軸力 $N(x)$ が変数 x の関数として表されるとき、式(9b)は変数係数の線形の斉次常微分方程式になり、厳密解の探求を複雑にすることは言うまでもない。

長柱の左端点($x=0$)と右端点($x=L$)での支持条件, すなわち, 境界条件には, 一般化応力の境界条件式と変位の境界条件式がある. これらは, 次のような組み合わせにより表される.

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u \text{ or } n_x N = \bar{N} \text{ on } \Gamma_N, \quad (10a)$$

$$w = \bar{w} \text{ on } \Gamma_w \text{ or } n_x Q = \bar{Q} \text{ on } \Gamma_Q, \quad (10b)$$

$$\theta = \bar{\theta} \text{ on } \Gamma_\theta \text{ or } n_x M = \bar{M} \text{ on } \Gamma_M. \quad (10c)$$

ここで, $\Gamma = \partial\Gamma = \{0, L\}$ は一次元領域の境界を表しており, 下付き文字の u, w, θ は変位の境界条件(基本境界条件)を, N, Q, M は一般化応力の境界条件(自然境界条件)を表している. n_x は長柱の境界に立てた外向き法線方向余弦の x 方向の成分であり, 左端点($x=0$)の境界で $n_x = -1$, 右端点($x=L$)の境界で $n_x = +1$ を取る. また, Q は z 軸に平行なせん断力であり, 次のように表される.

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} + N(x) \frac{dw(x)}{dx}. \quad (11)$$

これは式(9b)の $\{\}$ の中の式に相当し, 僅かに曲がった長柱の断面の接線方向に生じるせん断力 $S(x)$ とは異なることに注意する. なお, 各条件式の右辺のバーを付した変位 u, w , たわみ角 θ および一般化応力 N, Q, M は, 境界条件として与える(既知の)値であることを意味している.

長柱の支持条件の数学モデルは, これらの境界条件式を組み合わせ, 次のように理想化される.

ピン支点 (ヒンジ支点):

$$w = 0 \text{ on } \Gamma_w, \quad M = 0 \text{ on } \Gamma_M. \quad (12)$$

固定端:

$$w = 0 \text{ on } \Gamma_w, \quad \theta = 0 \text{ on } \Gamma_\theta. \quad (13)$$

自由端:

$$M = 0 \text{ on } \Gamma_M, \quad Q = 0 \text{ on } \Gamma_Q. \quad (14)$$

これらは, 斉次の境界条件式である.

(4) 一般化応力と変位で表された構成方程式

長柱に対して, 本稿のように右手直交直線座標系 $O-xyz$ を設定すると, yz 断面に設定した図心軸まわりの断面一次モーメントは零になる. このことから, 一般化応力と変位で表された構成方程式に含まれる軸変位 $u(x)$ と曲げたわみ曲線を表す面外変位 $w(x)$ に関する項は非連成化され, 微小ひずみ・微小回転の有限変位に基づく梁-柱理論の構成方程式は, 次のように表される.

$$N(x) = EA \left\{ \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dw(x)}{dx} \right]^2 \right\}, \quad (15a)$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + N(x) \frac{dw(x)}{dx}, \quad (15b)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (15c)$$

ここで, EA は伸び剛性, EI は曲げ剛性であり, E は縦弾性係数である. なお, 式(15a)の下線を付した右辺の第二項を無視したものが, 線形化された梁-柱理論の構成則になる.

(5) 支配方程式と境界条件式による強形式

式(9c)を式(9b)に代入した後, 更に一般化応力と変位で表された構成方程式の式(15c)を代入すれば, 変位で表された平衡方程式である長柱の線形座屈問題の支配方程式(基礎方程式)が次のように得られる.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[-EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right] = 0 \text{ in } \Omega. \quad (16)$$

さて, x 軸方向のつり合いの微分方程式(9a)は, 線部材の単純引張理論(棒の理論)の軸力 $N(x)$ に関する平衡方程式に等しく, 曲げに関する支配方程式(16)とは非連成である. よって, 境界条件式(10a)が与えられれば, $N(x)$ の厳密解は容易に求めることができる. 式(9a)を長柱の右端点($x=L$)で一般化応力の境界条件式($n_x N = -P$ on Γ_N)で解けば, 中心軸圧縮力の作用により生じる長柱の軸力 $N(x)$ の厳密解は,

$$N(x) = -P \quad (0 \leq x \leq L). \quad (17)$$

式(17)を式(16)に代入すれば, 中心軸圧縮力の作用を受ける均質かつ等断面長柱の線形座屈問題の支配方程式は, 次のように表される.

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \text{ in } \Omega. \quad (18)$$

また, 境界条件式を面外変位 w で表すと,

ピン支点 (ヒンジ支点):

$$w = 0 \text{ on } \Gamma_w, \quad -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ on } \Gamma_M. \quad (19)$$

固定端:

$$w = 0 \text{ on } \Gamma_w, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \text{ on } \Gamma_\theta. \quad (20)$$

自由端:

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ on } \Gamma_M, \quad (21)$$

$$-EI \frac{d^3 w}{dx^3} - P \frac{dw}{dx} = 0 \text{ on } \Gamma_Q.$$

本問題は, 定数係数の四階線型の斉次常微分方程式の斉

次境界値問題の自明でない解を求める固有値問題である。求められた中心軸圧縮力を座屈荷重 P_{cr} と呼び、これは長柱が安定平衡を与える中心軸圧縮力の上限を意味する。なお、座屈荷重 P_{cr} は固有値問題の固有値であり、これに対応する固有関数 $w(x)$ が曲げ座屈変形の形状を表す。

4. 強形式と等価な変分原理の汎関数

(1) 許容な試行関数を仮定した変分原理の汎関数

均質かつ一様断面の長柱が中心軸圧縮力 P の作用により僅かに曲がったときの汎関数 (全ポテンシャルエネルギー) Π は、次のように与えられる。

$$\Pi = U + V. \quad (22)$$

ここで、 U は長柱に蓄積されるひずみエネルギーであり、 V は中心軸圧縮力 P による外力ポテンシャルである。ひずみエネルギー U は、次のように表される。

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (23)$$

中心軸圧縮力 P の作用により長材が僅かに曲げ座屈変形を生じたときの右端部($x = L$)の軸圧縮力の作用方向の圧縮変位 u_L は、

$$\Delta u_L = -\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (24)$$

よって、中心軸圧縮力 P による外力ポテンシャル V は、

$$V = -(-P)u_L = -\frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (25)$$

式(23)と式(25)を式(22)に代入すれば、汎関数 Π は次のように表される。

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (26)$$

(2) Lagrangeの未定乗数法による付帯条件付き変分原理の汎関数

面外変位 $w(x)$ の近似関数に基本境界条件を満足しない許容でない関数を仮定したとき、長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)での非斉次の基本境界条件を付帯条件とする汎関数 Π^* は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi^* = U + V \\ + \lambda_{w0} (w - \bar{w}_0) \Big|_{x=0} + \lambda_{wL} (w - \bar{w}_L) \Big|_{x=L} \\ + \lambda_{\theta 0} (\theta - \bar{\theta}_0) \Big|_{x=0} + \lambda_{\theta L} (\theta - \bar{\theta}_L) \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $\lambda_{w0}, \lambda_{wL}$ は、それぞれ、長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)の面外変位 w の境界条件に関するLagrangeの未定乗数であり、 $\lambda_{\theta 0}, \lambda_{\theta L}$ は、それぞれ、長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)のたわみ角 θ の境界条件に関するLagrangeの未定乗数である。式(27)の右辺のバーを付した面外変位 w とたわみ角 θ は境界での既知の値であり、その下付き文字の0とLは、それぞれ、 $x = 0, x = L$ での条件であることを意味している。斉次の基本境界条件を考えるならば、

$$\begin{aligned} \Pi^* = U + V \\ + \lambda_{w0} w \Big|_{x=0} + \lambda_{wL} w \Big|_{x=L} \\ + \lambda_{\theta 0} \theta \Big|_{x=0} + \lambda_{\theta L} \theta \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (28)$$

(3) 仮想ばね法により基本境界条件を緩和させた変分原理の汎関数

仮想ばね法 (penalty関数法) では、Lagrangeの未定乗数 λ を次のように近似する²²⁾。

$$\lambda \cong \alpha g(v). \quad (29)$$

ここで、 $g(v) = 0$ は拘束条件であり、 α は正の大きな値 (penalty数) である。数学的には $\alpha \rightarrow \infty$ のとき、 $g(v) \rightarrow 0$ であるが、数値計算では α に正の大きな値を設定したとき、 $g(v) \cong 0$ になることを期待する。本稿では、このpenalty数 α を長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)での非斉次の基本境界条件に対応する仮想のばね定数として考える¹⁷⁾。このときの汎関数 $\bar{\Pi}$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = U + V \\ + \frac{\alpha_{w0}}{2} (w - \bar{w}_0)^2 \Big|_{x=0} + \frac{\alpha_{wL}}{2} (w - \bar{w}_L)^2 \Big|_{x=L} \\ + \frac{\beta_{\theta 0}}{2} (\theta - \bar{\theta}_0)^2 \Big|_{x=0} + \frac{\beta_{\theta L}}{2} (\theta - \bar{\theta}_L)^2 \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 α_{w0}, α_{wL} は、それぞれ、長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)の面外変位 w に抵抗する仮想の鉛直ばね定数であり、 $\beta_{\theta 0}, \beta_{\theta L}$ は、それぞれ、長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)のたわみ角 θ に抵抗する仮想の回転ばね定数である。斉次の基本境界条件を考えるならば、

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = U + V \\ + \frac{\alpha_{w0}}{2} w^2 \Big|_{x=0} + \frac{\alpha_{wL}}{2} w^2 \Big|_{x=L} \\ + \frac{\beta_{\theta 0}}{2} \theta^2 \Big|_{x=0} + \frac{\beta_{\theta L}}{2} \theta^2 \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (31)$$

5. 仮想ばね法により基本境界条件を緩和させた B-spline Ritz法による離散化された座屈方程式と座屈条件式の定式化

式(31)の汎関数の変関数 (長柱の面外変位) $w(x)$ を次の

試行関数 $W(x)$ で近似する.

$$\begin{aligned} w(x) &\cong W(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{CP}} A_i N_{i,p}(x) \cdot \\ &= \mathbf{N}_{i,p} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで,

$$\mathbf{N}_{i,p} = [N_{1,p}(x), N_{2,p}(x), \dots, N_{n_{CP}-1,p}(x), N_{n_{CP},p}(x)], \quad (33)$$

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{n_{CP}-1}, A_{n_{CP}}\}^T, \quad (34)$$

であり, Tは転置を意味する. $N_{i,p}(x)$ は次数 p のB-spline基底関数, i は基底関数の番号, A_i は i 番目の基底の重み係数であり, $n_{CP}(=M+p+1)$ は基底関数の数である. 領域 Ω に1の分割(partition of unity)を満たすB-spline基底を張るために必要なノットの数 M は,

$$M = m + 2p. \quad (35)$$

ただし, m は領域 Ω 内(境界 Γ を含む)に設定するノットの数であり, $2p$ は領域 Ω の外側(境界 Γ を含まない)に設ける付加ノットの数である. 図-1を参照すれば, パラメータ領域 $[0, 1]$ の左側と右側に, それぞれ, p 個の付加ノットが設定されていることが確認できよう. 基底関数の数 n_{CP} と境界 Γ を含む領域 Ω 内に設定するノットの数 m との間には, 次の関係が成り立つ.

$$n_{CP} = m + p - 1. \quad (36)$$

式(32)を式(31)の汎関数 $\bar{\Pi}$ に代入すると, $\bar{\Pi}$ は有限の自

由で近似される. この近似された汎関数 $\bar{\Pi}$ の停留条件:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial A_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_{CP} - 1, n_{CP}), \quad (37)$$

より, 次の離散化された座屈方程式を得る.

$$\underbrace{[(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p)]}_{\mathbf{K}} - P\mathbf{K}_G \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (38)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_0 = EI \int_0^L \frac{d^2 \mathbf{N}_{i,p}^T}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_{j,p}}{dx^2} dx, \quad (39)$$

は自由境界を有する長柱の剛性行列(すなわち, 無拘束の長柱の剛性行列),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p = & \alpha_{w0} \mathbf{N}_{i,p}^T \mathbf{N}_{j,p} \Big|_{x=0} + \alpha_{wL} \mathbf{N}_{i,p}^T \mathbf{N}_{j,p} \Big|_{x=L} \\ & + \beta_{\theta 0} \frac{d\mathbf{N}_{i,p}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{j,p}}{dx} \Big|_{x=0} + \beta_{\theta L} \frac{d\mathbf{N}_{i,p}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{j,p}}{dx} \Big|_{x=L}, \end{aligned} \quad (40)$$

は基本境界条件を緩和するための仮想ばねの剛性行列であり, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p$ は長柱の剛性行列である. また,

$$\mathbf{K}_G = P \int_0^L \frac{d\mathbf{N}_{i,p}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{j,p}}{dx} dx, \quad (41)$$

は長柱の幾何剛性行列であり, $\mathbf{0}$ は零の列ベクトルである. 剛性行列 $\mathbf{K}_0$ と幾何剛性行列 $\mathbf{K}_G$ は, $(p+1)$ 点のGauss-Legendreの数値積分により求めた.

式(38)の自明でない解は, 次式の座屈条件式(固有方程

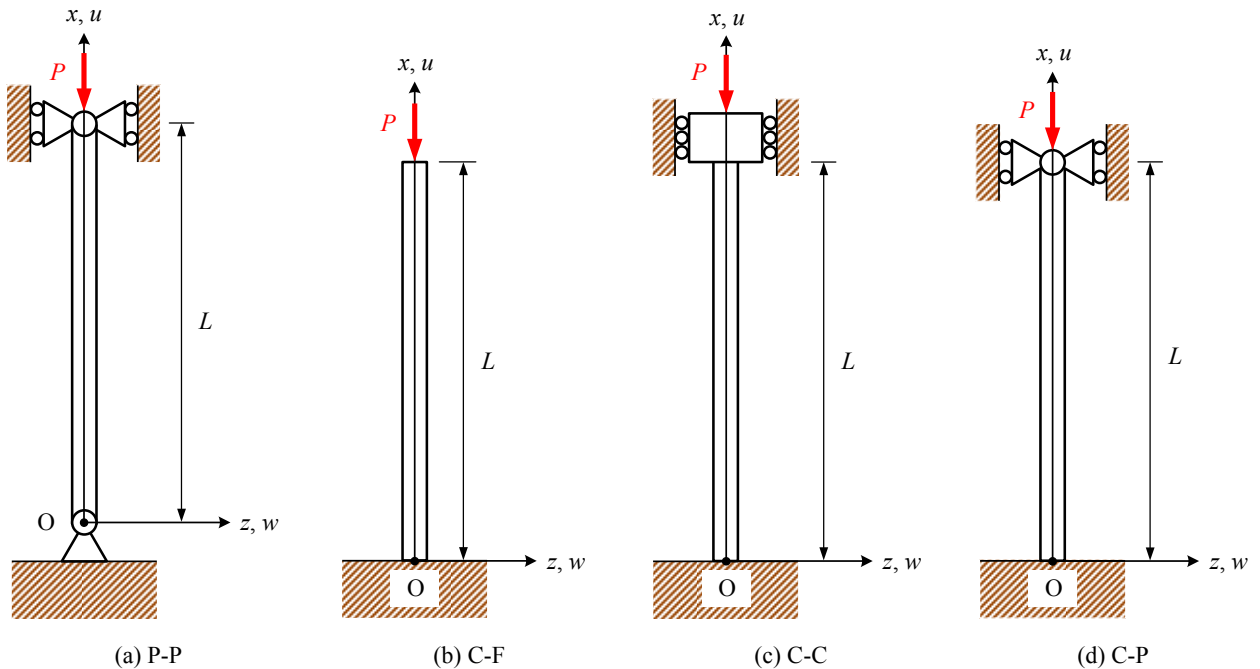


図-3 数値実験に用いる長柱の支持条件

式) :

$$\det[(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p) - P\mathbf{K}_G] = 0, \quad (42)$$

から固有値 P を求め、これを式(38)に代入して固有値 P に対応する固有ベクトル $\mathbf{A}$ を決定することで得られる。なお、固有値と固有ベクトルのペアは n_{CP} 個だけ求められる。

6. 数値実験および考察

ここでは、中心軸圧縮力を受ける均質かつ等断面長柱の線形座屈問題を本手法により解析し、座屈荷重 P_{cr} に与える spline 次数 p 、境界を含む領域内に設定するノットの数（以下、ノットの数と略す） m 、仮想ばね定数の値および長柱の支持条件の影響を詳細に調べる。

本稿では長柱の座屈荷重 P_{cr} 、仮想の鉛直ばね定数 α_{w0} 、 α_{wL} および仮想の回転ばね定数 $\beta_{\theta 0}$ 、 $\beta_{\theta L}$ を、次のように無次元化して表している。

$$P^* = \frac{P_{cr} L^2}{EI}. \quad (43)$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha_{w0} L^3}{EI} = \frac{\alpha_{wL} L^3}{EI}, \quad (44)$$

$$\beta^* = \frac{\beta_{\theta 0} L}{EI} = \frac{\beta_{\theta L} L}{EI}. \quad (45)$$

数値実験に設定する支持条件は、図-3に示す工学的に重要な四つのケースとし、例えばC-Pのように表す。これは柱の下端($x=0$)で固定Cであり、上端($x=L$)でピン支点（ヒンジ支点）Pであることを意味する。また、自由端はFで表す。なお、(a)と(c)は対称の支持条件、(b)と(d)は非対称の境界条件であり、(a)と(b)は静定、(c)と(d)は不静定である。

通常、工学分野の諸問題の解決を目的とするならば、強形式の近似解は有効数字三桁から四桁程度の精度があれば十分である。しかし、渡辺²³⁾が述べているように、Ritz法により数値的に安定して高精度な近似解が計算できるようになれば、Ritz解は厳密解やこれの級数形式の解に代わって有限要素の性能評価や各種離散化手法が強形式を正しく解いているかの検証(verification)への活用が期待される。このような視点から、本稿では無次元座屈荷重 P^* を有効桁数十桁程度で整理した。なお、数値計算には64 bit OSのpersonal computerを用い、Fortranの倍精度で計算した。

(1) Timoshenkoのエネルギー法に基づく本手法の近似解の精度評価

Timoshenkoのエネルギー法によれば、中心軸圧縮力を受ける均質かつ等断面長柱の座屈荷重 P_{cr} は、次式によって求めることができる²⁴⁾。

$$P_{cr} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}. \quad (46)$$

ここで、分子は座屈による曲げ変形により長柱に貯えられるひずみエネルギー（内力仕事）であり、分母は長柱の曲げ座屈変形により生じる軸圧縮変位と中心軸圧縮力とがなす外力仕事を意味する。式(46)の右辺の表示は、線形化された梁－柱理論に基づく長柱の線形座屈問題におけるRayleigh商である²⁴⁾。この式から次のことがわかる。

- 強形式を満足する面外変位 $w(x)$ の厳密解を用いれば、式(46)により座屈荷重 P_{cr} の厳密解を得ることができる²⁴⁾。
- 座屈荷重 P_{cr} は、外力仕事に対するひずみエネルギーの大きさとして評価される。

なお、許容である試行関数を仮定したRitz法による近似解は、厳密解の上界を与える^{8), 10)}ので、常に次の関係が成り立つ。

$$P_{cr} \geq P_{cr}^{\text{Exact}}. \quad (47)$$

ここで、不等式の左辺はRitz法による近似解であり、右辺は厳密解である。

本手法により求められる座屈荷重 P_{cr} は、式(46)の右辺の分母に対する分子の値の大きさにより決定される。結局のところ、式(38)を数値的に解いて得られる未定係数 $\mathbf{A}$ の値が座屈荷重 P_{cr} の精度を決めていることになる。単純ノットベクトル $\mathbf{t}$ からなるB-spline基底関数は領域 Ω の境界 Γ で有限の値を持つ基底関数が p 個だけ存在することは、先に述べた通りである（図-1を参照）。例えば、 $p=2$ 次のB-spline基底関数をRitz法の近似解に仮定すると、長柱の下端境界($x=0$)を定義域とする基底は、一番目の基底 $N_{1,2}(x)$ と二番目の基底 $N_{2,2}(x)$ である。正確には三番目の基底 $N_{3,2}(x)$ も境界($x=0$)を定義域に持つが、 $N_{3,2}(0)=0$ であるので今回は考える必要がない。故に、 $w(0)=0$ の基本境界条件を満足するためには、次式が成立しなければならない。

$$W(0) = A_1 \underbrace{N_{1,2}(0)}_{=\frac{1}{2}} + A_2 \underbrace{N_{2,2}(0)}_{=\frac{1}{2}} = 0. \quad (48)$$

本手法は仮想ばね法により基本境界条件を緩和させているに過ぎないので、式(48)は近似的に満足されることになる。すなわち、式(31)の汎関数が停留するように求められた未定係数 $\mathbf{A}$ の成分 A_1 と A_2 を用いて、式(48)が数値的に零になることを期待する。近似解の精度を改善するために spline 次数 p を高めると式(48)の項数は増加し、図-1からも分かるように基底関数 $N_{i,p}(x)$ の最大値は小さくなる。このことから、spline 次数 p を高次にすると数値計算上の誤差による近似解の精度低下が予想される。

表-1 中心軸圧縮力を受ける長柱の無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p , ノット数の m と仮想ばね定数 α^* の影響: P-P

p	α^*	m	Mode 1 (S1)	Mode 2 (A1)	Mode 3 (S2)	Mode 4 (A2)	
4	10^8	11	9.86960468	39.4784999	88.8290641	157.948063	
		21	9.86960441	39.4784188	88.8264727	157.914029	
		31	9.86960440	39.4784177	88.8264424	157.913700	
		41	9.86960440	39.4784176	88.8264401	157.913675	
		51	9.86960440	39.4784176	88.8264397	157.913672	
		61	9.86960440	39.4784176	88.8264397	157.913671	
	10^{10}	11	9.86960468	39.4784999	88.8290641	157.948063	
		21	9.86960441	39.4784188	88.8264727	157.914029	
		31	9.86960440	39.4784177	88.8264424	157.913700	
		41	9.86960440	39.4784176	88.8264401	157.913675	
		51	9.86960440	39.4784176	88.8264397	157.913672	
		61	9.86960440	39.4784176	88.8264397	157.913671	
	10^{12}	11	9.86960424	39.4784995	88.8290636	157.948063	
		21	9.86960433	39.4784187	88.8264726	157.914029	
		31	9.86960437	39.4784177	88.8264424	157.913700	
		41	9.86960437	39.4784176	88.8264401	157.913675	
		51	9.86960440	39.4784176	88.8264397	157.913672	
		61	9.86960439	39.4784176	88.8264396	157.913671	
	5	10^8	11	9.86960440	39.4784187	88.8265251	157.915905
			21	9.86960440	39.4784176	88.8264398	157.913675
			31	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913671
			41	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670
			51	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670
			61	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670
10^{10}		11	9.86960440	39.4784187	88.8265251	157.915905	
		21	9.86960440	39.4784176	88.8264398	157.913675	
		31	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913671	
		41	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670	
		51	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670	
		61	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670	
10^{12}		11	9.86960446	39.4784187	88.8265252	157.915905	
		21	9.86960439	39.4784176	88.8264398	157.913675	
		31	9.86960442	39.4784176	88.8264396	157.913671	
		41	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670	
		51	9.86960439	39.4784176	88.8264396	157.913670	
		61	9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670	
		Exact ²⁵⁾		9.86960440	39.4784176	88.8264396	157.913670

(2) 静定の長柱

まず, 面外変位 w に対応する無次元仮想鉛直ばね定数 α^* と無次元座屈荷重 P^* , 離散化条件の関係を整理する. 表-1は, 支持条件がP-Pである中心軸圧縮力の作用による長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と無次元仮想鉛直ばね定数 α^* の影響をテーブル形式で整理したものである. 分岐座屈荷重に相当

するのは最低次の座屈荷重であるが, 二次以上の座屈荷重とこれに対応する座屈モードは, 座屈荷重を高めるための重要な情報を提供してくれる. このことから, 本稿では一次から四次までの座屈荷重について検討した. なお, 表中のS1とS2は, それぞれ, 長柱の中央点($x = L/2$)に関して対称な一次と二次の座屈モードを, A1とA2は, それぞれ, 同点に関して逆対称な一次と二次の座屈モードを意味する.

表-2 中心軸圧縮力を受ける長柱の無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: C-F

p	κ^*	m	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	
4	10^8	11	<u>2.46740105</u>	22.2066177	61.6856094	120.913496	
		21	2.46740105	22.2066096	61.6850340	120.902774	
		31	2.46740105	<u>22.2066095</u>	61.6850269	120.902662	
		41	2.46740105	22.2066095	61.6850264	120.902653	
		51	2.46740105	22.2066095	<u>61.6850263</u>	<u>120.902652</u>	
		61	2.46740105	22.2066095	61.6850263	120.902652	
	10^{10}	11	<u>2.46740110</u>	22.2066181	61.6856105	120.913499	
		21	2.46740110	22.2066100	61.6850352	120.902776	
		31	2.46740110	<u>22.2066099</u>	61.6850282	120.902664	
		41	2.46740110	22.2066099	61.6850276	120.902656	
		51	2.46740110	22.2066099	<u>61.6850275</u>	<u>120.902654</u>	
		61	2.46740110	22.2066099	61.6850275	120.902654	
	10^{12}	11	2.46740126	22.2066196	61.6856146	120.913507	
		21	2.46740102	22.2066093	61.6850333	120.902772	
		31	2.46740111	22.2066100	61.6850283	120.902664	
		41	2.46740106	22.2066095	61.6850265	120.902654	
		51	2.46740111	22.2066100	61.6850278	120.902655	
		61	2.46740109	22.2066099	61.6850274	120.902654	
	5	10^8	11	<u>2.46740105</u>	<u>22.2066095</u>	61.6850370	120.903095
			21	2.46740105	22.2066095	<u>61.6850263</u>	120.902653
			31	2.46740105	22.2066095	61.6850263	120.902652
			41	2.46740105	22.2066095	61.6850263	<u>120.902651</u>
			51	2.46740105	22.2066095	61.6850263	120.902651
			61	2.46740105	22.2066095	61.6850263	120.902651
10^{10}		11	<u>2.46740110</u>	22.2066100	61.6850383	120.903098	
		21	2.46740110	<u>22.2066099</u>	<u>61.6850275</u>	120.902655	
		31	2.46740110	22.2066099	61.6850275	<u>120.902654</u>	
		41	2.46740110	22.2066099	61.6850275	120.902654	
		51	2.46740110	22.2066099	61.6850275	120.902654	
		61	2.46740110	22.2066099	61.6850275	120.902654	
10^{12}		11	2.46740135	22.2066121	61.6850440	120.903108	
		21	2.46740114	22.2066103	61.6850287	120.902657	
		31	2.46740105	22.2066095	61.6850262	120.902651	
		41	2.46740109	22.2066098	61.6850273	120.902654	
		51	2.46740109	22.2066098	61.6850272	120.902653	
		61	2.46740111	22.2066100	61.6850277	120.902654	
		Exact⁽²⁵⁾		<u>2.46740110</u>	<u>22.2066099</u>	<u>61.6850275</u>	<u>120.902654</u>

無次元仮想鉛直ばね定数 κ^* は、 10^8 , 10^9 , 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} の五ケースについて検討した。本稿では、 10^8 , 10^{10} , 10^{12} の結果を示している。梁-柱理論に基づく線部材の二節点有限要素に用いられるHermite型の形状関数は、隣接する要素間で面外変位 w とたわみ角 θ が連続になるような三次の区分的多項式である。このことを鑑み、本稿ではspline次数 p を4と5に設定した。Spline次数 $p=4$ のとき、面外変位 w は三階導

関数まで連続になるので、せん断力 $Q(x)$ は一次の区分的多項式で近似される。当然のことではあるが、spline次数 $p=5$ に設定すると、面外変位 w は四階導関数まで連続であるので、せん断力 $Q(x)$ の近似式は二次の区分的多項式になる。ノットの数 m は、11から61まで変化させ、有効桁数九桁で表した無次元座屈荷重 P^* の値の変化を調べた。表のboldの数値は近似解が収束し、かつ厳密解と一致したことを意味

表-3 中心軸圧縮力を受ける長柱の無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: C-C

p	κ^*	m	Mode 1 (S1)	Mode 2 (A1)	Mode 3 (S2)	Mode 4 (A2)
4	10^8	11	39.4785116	80.7649907	157.951191	238.965477
		21	39.4784173	80.7629243	157.914049	238.720260
		31	39.4784161	80.7629003	157.913695	238.718188
		41	39.4784160	80.7628985	157.913669	238.718045
		51	39.4784160	80.7628982	157.913665	238.718023
		61	39.4784160	80.7628981	157.913665	238.718018
	10^{10}	11	39.4785131	80.7650066	157.951197	238.965525
		21	39.4784189	80.7629403	157.914055	238.720307
		31	39.4784177	80.7629163	157.913701	238.718235
		41	39.4784176	80.7629144	157.913676	238.718092
		51	39.4784176	80.7629142	157.913672	238.718071
		61	39.4784176	80.7629141	157.913671	238.718066
	10^{12}	11	39.4785182	80.7650200	157.951218	238.965574
		21	39.4784168	80.7629363	157.914047	238.720295
		31	39.4784186	80.7629182	157.913738	238.718241
		41	39.4784169	80.7629132	157.913673	238.718089
		51	39.4784179	80.7629150	157.913673	238.718073
		61	39.4784174	80.7629138	157.913670	238.718065
5	10^8	11	39.4784169	80.7629416	157.915538	238.740313
		21	39.4784160	80.7628982	157.913668	238.718053
		31	39.4784160	80.7628981	157.913664	238.718017
		41	39.4784160	80.7628981	157.913664	238.718016
		51	39.4784160	80.7628981	157.913664	238.718016
		61	39.4784160	80.7628981	157.913664	238.718016
	10^{10}	11	39.4784186	80.7629579	157.915545	238.740361
		21	39.4784176	80.7629142	157.913674	238.718100
		31	39.4784176	80.7629140	157.913670	238.718064
		41	39.4784176	80.7629141	157.913670	238.718063
		51	39.4784176	80.7629141	157.913670	238.718063
		61	39.4784176	80.7629141	157.913670	238.718063
	10^{12}	11	39.4784358	80.7629941	157.915616	238.740470
		21	39.4784191	80.7629175	157.913681	238.718111
		31	39.4784157	80.7629104	157.913663	238.718053
		41	39.4784174	80.7629138	157.913670	238.718063
		51	39.4784172	80.7629134	157.913669	238.718061
		61	39.4784180	80.7629151	157.913672	238.718066
	Exact ²⁵⁾		39.4784176	80.7629142	157.913670	238.718064

する。なお、厳密解²⁵⁾は各支持条件に対応する座屈条件式を数値的に解き、有効桁数十五桁で収束した座屈荷重の値を求めた。厳密解の値もboldで示してある。この支持条件の曲げ座屈モードの厳密解は、正弦関数による弾性変形項のみで表される。

表-1より、一次から四次までの座屈荷重の最も良好な収束状態を示しているのは、spline次数 $p = 5$ かつ無次元仮想

鉛直ばね定数 $\alpha^* = 10^8, 10^{10}$ である。このとき、座屈荷重の近似解は上界であり、ノットの数 m の増大にともなって上から厳密解に近づいていく。同じspline次数の無次元仮想ばね定数 $\alpha^* = 10^{12}$ のときの一次の座屈荷重は一定の値に収束せずに振動しており、 $m = 21, 51$ の一次の座屈荷重は下界値を与えている。これは、 $p = 4$ のときも同様である。これより、無次元仮想鉛直ばね定数 $\alpha^* = 10^{12}$ に設定するとspline

表-4 中心軸圧縮力を受ける長柱の無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: C-P

p	κ^*	m	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	
4	10^8	11	20.1907334	59.6800317	118.910020	197.959034	
		21	20.1907274	59.6795193	118.899978	197.858764	
		31	20.1907274	59.6795130	118.899872	197.857875	
		41	20.1907273	59.6795125	118.899864	197.857812	
		51	20.1907273	59.6795124	118.899862	197.857803	
		61	20.1907273	59.6795124	118.899862	197.857800	
	10^{10}	11	20.1907346	59.6800351	118.910027	197.959045	
		21	20.1907286	59.6795229	118.899985	197.858776	
		31	20.1907286	59.6795165	118.899879	197.857887	
		41	20.1907285	59.6795160	118.899871	197.857824	
		51	20.1907285	59.6795159	118.899870	197.857814	
		61	20.1907285	59.6795159	118.899869	197.857812	
	10^{12}	11	20.1907355	59.6800390	118.910035	197.959060	
		21	20.1907282	59.6795211	118.899981	197.858770	
		31	20.1907285	59.6795167	118.899879	197.857888	
		41	20.1907282	59.6795150	118.899869	197.857821	
		51	20.1907287	59.6795162	118.899870	197.857815	
		61	20.1907285	59.6795158	118.899869	197.857812	
	5	10^8	11	20.1907274	59.6795214	118.900268	197.865558
			21	20.1907273	59.6795124	118.899863	197.857813
			31	20.1907273	59.6795124	118.899862	197.857800
			41	20.1907273	59.6795124	118.899862	197.857799
			51	20.1907273	59.6795124	118.899862	197.857799
			61	20.1907273	59.6795124	118.899862	197.857799
10^{10}		11	20.1907286	59.6795250	118.900275	197.865570	
		21	20.1907286	59.6795160	118.899870	197.857825	
		31	20.1907285	59.6795159	118.899869	197.857811	
		41	20.1907285	59.6795159	118.899869	197.857811	
		51	20.1907285	59.6795159	118.899869	197.857811	
		61	20.1907285	59.6795159	118.899869	197.857811	
10^{12}		11	20.1907306	59.6795306	118.900285	197.865584	
		21	20.1907290	59.6795171	118.899873	197.857829	
		31	20.1907281	59.6795147	118.899867	197.857808	
		41	20.1907285	59.6795158	118.899869	197.857811	
		51	20.1907285	59.6795157	118.899869	197.857810	
		61	20.1907286	59.6795162	118.899870	197.857812	
		Exact²⁵⁾		20.1907286	59.6795159	118.899869	197.857811

次数 p にかかわらず, 若干ではあるが数値解に影響を与えていると考えられる. なお, spline次数 $p=4$ のときの四次の座屈荷重は無次元仮想鉛直ばね定数 α^* の値にかかわらず, ノットの数 m を増やしても一定値に収束しない. 以上の考察は, あくまで有効桁数を九桁としたときのものである.

次に, たわみ角 θ に対応する無次元仮想回転ばね定数 β^* と離散化条件, 無次元座屈荷重 P^* の関係を整理する. 支持

条件がC-Fである長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と無次元仮想ばね定数 κ^* の影響を表-2に示す. ここでは $\beta^* = \alpha^*$ と設定し, それを κ^* で表すこととする. 表-1の結果から判断すると, 無次元仮想鉛直ばね定数 α^* は 10^8 と 10^{10} の二ケースについて検討すればよいであろうが, 参考のために 10^{12} の結果も示した. なお, 表-1と同様に, boldの数値は近似解が収束し,

かつ厳密解と一致したことを意味している。ただし、近似解は収束したが、その収束値が厳密解と一致しないものには、**bold**の数値に下線を付した。この支持条件の曲げ座屈モードの厳密解は、余弦関数による弾性変形と剛体変位の二つの項により表現される。

表-2より、無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ のとき、spline次数 p に係わらず、一次から四次までの座屈荷重は上界であり、ノットの数 m の増大にともなって上から厳密解に近づく良好な収束状態を示している。その収束値は、有効桁数九桁で厳密解と一致する。他方、無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^8$ のときは、仮想ばねによる長柱の剛性行列の評価が正しくなく、ノット数 $m = 11$ の無次元座屈荷重は上界であるが、座屈荷重は厳密解より小さな下界の値に収束している。これは、表-1と異なる点である。なお、無次元仮想鉛直ばね定数 α^* を 10^8 と 10^{10} に設定し、それぞれに対して無次元仮想回転ばね定数 β^* を 10^8 から 10^{12} まで変化させてみたが結論は変わらなかった。

(3) 不静定の長柱

(2)より、静定の長柱の座屈荷重の近似解に影響を与えない無次元仮想鉛直ばね定数 α^* の最大値は 10^{10} であり、固定端については無次元仮想鉛直ばね定数 α^* 、無次元仮想回転ばね定数 β^* 共に 10^{10} であることがわかった。ここでは、この結果に基づき不静定な長柱について(2)と同様の検討を行う。表-3と表-4は、それぞれ、C-C、C-Pの支持条件を有する長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 P^* に与えるspline次数 p 、ノットの数 m と無次元仮想ばね定数 κ^* の影響を整理したものである。

表-3は表-2と似たような傾向を示しており、最も良好な結果を与えるのは、spline次数 $p = 5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ の組み合わせであろう。この支持条件の一次と三次の対称な座屈モードの正解は表-2と同様の二項により表現され、無次元座屈荷重 P^* は有効数字九桁で収束し、その値は厳密解に一致する。これに対して、二次と四次の逆対称の座屈モードは余弦関数と正弦関数による二つの弾性変形項、剛体回転項と剛体変位項の四つの混ぜ合わせにより表現され、対称座屈モードに比べてやや複雑である。このときの座屈荷重も有効数字九桁で収束値を得ているが、その値は厳密解よりも僅かに小さい。表-1、表-2と表-3の一次と三次の座屈荷重の収束状態と精度から判断すると、二次と四次の座屈荷重が下界となる原因はその座屈モードの形状が影響していると考えられる。この考察も有効桁数を九桁としたときのものであって、有効桁数を八桁にすれば、spline次数 $p = 5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ に設定した本手法の収束値は厳密解に一致する。なお、表-1のP-P、表-2のC-Fと異なり、C-Cのspline次数 $p = 4$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ の二次から四次までの座屈荷重は有効桁数九桁での収束値が得られておらず、不静定の長柱は近似解の収束性が悪くなっていることも確認できる。

表-4は、表-3の上端のたわみ角の拘束を解除したモデルに相当する。この支持条件の曲げ座屈モードの厳密解も余弦関数と正弦関数による二つの弾性変形、剛体回転と剛体変位の四つの項で表される。この支持条件についてもspline次数 $p = 5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ の組み合わせが最も良好な結果を与えている。表-3とは異なり、二次から四次の座屈荷重の収束値は上界であるが、一次のそれは下界である。ただし、これも有効桁数八桁で整理すれば、厳密解に一致する精度の高い上界値になる。

(2)と(3)より、無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ に設定し、離散化条件をspline次数 $p = 5$ かつノットの数 $m = 41$ に設定したときの長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 P^* は、支持条件にかかわらず有効桁数九桁での収束値である。その収束値は、有効桁数八桁から九桁の範囲で厳密解に一致するという高い近似精度が示された。

7. 結 言

本稿では、線形化された梁-柱理論に従う中心軸圧縮力を受ける均質かつ真つすぐな長柱の線形座屈問題を例題とし、この強形式の厳密解を正解として仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法の座屈荷重の精度、spline次数、解析領域内に配置するノットの数、仮想ばね定数の値および支持条件の関係を詳細に調べた。本調査から、次の知見が得られた。

- [1] 支持条件とspline次数 p にかかわらず、数値的に安定して近似解に影響を与えない範囲の仮想ばね定数の最大値は、無次元仮想鉛直ばね定数 α^* 、無次元仮想回転ばね定数 β^* 共に 10^{10} であった。
- [2] Spline次数 $p = 5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ に設定したときの長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 P^* は、支持条件にかかわらず、ノットの数 m の増大にともなって上から厳密解に近づくような収束状態を示し、有効桁数九桁での収束値が得られる。ただし、この収束値は厳密解の下界の値を与えることがある。
- [3] [2]で得られた収束値は、有効桁数八桁から九桁の範囲で本問題の座屈荷重の厳密解に一致する。

なお、固有関数とその導関数の精度についても検討しているが、これについては別の機会に報告する。今後は、基本境界条件を正確に満足する許容な試行関数を仮定したB-spline Ritz法により同様の調査を実施し、本稿の結果と比較する予定である。

最後に、本稿で示した手法に新規性はないが、Ritz解を厳密解や級数解の代替として活用する²³⁾という従来あまり検討されることのなかった視点から調査結果を整理した。本稿は同研究分野の専門家による査読を経ずに公開されるが、本稿で示した表の数値は、読者の判断で種々の離

散化手法の検証などに使っていただければ幸いです。

謝辞：本研究の一部は、LIXIL住生活財団調査研究助成（2013年度）および前田記念工学振興財団研究助成（平成27年度）を受けて行われました。ここに記して謝意を示します。

参考文献

- 1) 土木学会構造工学委員会計算力学とその応用に関する研究小委員会：構造工学における計算力学の基礎と応用（構造工学シリーズ7），土木学会，pp.118-154，1997.
- 2) 山本寧音，名木野晴暢，足立忠晴，樋口理宏：軸方向傾斜機能材料からなる柱部材の線形座屈特性に与える縦弾性係数の変化の影響，第5回九州橋梁・構造工学研究会シンポジウム論文集（USB），R4-1（6 pages），2017.
- 3) 山本寧音，名木野晴暢，足立忠晴，樋口理宏：軸方向に傾斜機能を有する線構造部材の線形座屈固有値問題の解析手法，土木学会西部支部 研究発表会講演概要集（CD-ROM），I-6，pp.11-12，2017.
- 4) 山本寧音，名木野晴暢，足立忠晴：軸方向傾斜機能材料からなる線状部材の線形座屈特性に与える支持条件の影響，土木学会西部支部 研究発表会講演概要集（CD-ROM），I-23，pp.45-46，2018.
- 5) 山本寧音，名木野晴暢，足立忠晴，岩崎英治：軸方向傾斜機能材料からなる線状部材の線形座屈解析，土木学会第73回年次学術講演会講演概要集（DVD-ROM），I-538，pp.1075-1076，2018.
- 6) A.W. Leissa: The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods, Journal of Sound and Vibration, Vol.287 (4-5), pp.961-978, 2005.
- 7) 菊地文雄：有限要素法概説 [新訂版] ー理工学における基礎と応用ー（FEM + BEM = 3），サイエンス社，pp.25-38，2007.
- 8) T.R. トーカート（著）. 岩本卓也（翻訳）：構造力学とエネルギー原理（理工学海外名著シリーズ32），ブレイン図書出版，pp.76-77，1979.
- 9) 林毅，村外志夫：変分法（応用数学講座 第13巻），コロナ社，pp.1-89，1958.
- 10) C.L.ディム，I.H.シャームス（共著），砂川恵（監訳）：材料力学と変分法（理工学海外名著シリーズ26），ブレイン図書出版，pp.94-151，1977.
- 11) 山崎徳也，彦坂熙（共著）：構造解析の基礎，共立出版，pp.165-187，1978.
- 12) H. Nagino, T. Mikami, T. Mizusawa: Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method, Journal of Sound and Vibration, Vol.317 (1-2), pp.329-353, 2008.
- 13) 名木野晴暢，三上隆，水澤富作：B-spline Ritz法による中実円筒体の3次元自由振動解析，構造工学論文集，Vol.54A，pp.90-101，2008.
- 14) S. Kitipornchai, Y. Xiang, K.M. Liew: Vibration Analysis of Corner Supported Mindlin Plates of Arbitrary Shape Using the Lagrange Multiplier Method, Journal of Sound and Vibration, Vol.173 (4), pp.457-470, 1994.
- 15) 内山武司，上田正生：点支持を有するMindlin平板の自由振動解析，日本建築学会構造系論文集，63巻，512号，pp.83-89，1998.
- 16) 名木野晴暢，水澤富作，三上隆：点支持された周辺自由Mindlin平板の自由振動解析へのB-spline Ritz法の適用性，応用力学論文集，Vol.12，pp.143-154，2009.
- 17) R. Kao: Approximate solutions by utilizing hill functions, Computers & Structures, Vol.3 (2), pp.397-412, 1973.
- 18) R. Kao: Application of hill functions to two-dimensional plate problems, International Journal of Solids and Structures, Vol.11 (1), pp.21-31, 1975.
- 19) T. Mizusawa, T. Kajita, M. Naruoka: Vibration of skew plates by using B-spline functions, Journal of Sound and Vibration, Vol.62 (2), pp.301-308, 1979.
- 20) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194 (39-41), pp.4135-4195, 2005.
- 21) J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs: Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, John Wiley & Sons, 2009.
- 22) T.J.R. Hughes: The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, pp.185-197, 2000.
- 23) 渡辺力：p-Ritz法における試行関数の改良に関する一考察，構造工学論文集A，61A巻，pp.1-10，2015.
- 24) 福本秀士：構造物の座屈・安定解析（新体系土木工学9），技報堂出版，pp.37-98，1982.
- 25) C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy: Exact solutions for buckling of structural members, CRC Press, pp.9-75 (chapter 2), 2004.

(2019.9.30 受付)

仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法

に設定する最適な仮想ばね定数の値について (その2)

—自重の作用による均質な等断面長柱の線形座屈問題—

山本 寧音¹・名木野 晴暢^{2†}・足立 忠晴³

¹長岡技術科学大学大学院, ²都市・環境工学科, ³豊橋技術科学大学

†連絡著者 / Corresponding author (E-mail: nagino@oita-ct.ac.jp)

本稿では, 線形化された梁-柱理論に従う自重の作用による均質かつ真つすぐな長柱の線形座屈問題を仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法により解析し, 座屈荷重に与えるspline次数, 解析領域内に配置するノットの数, 仮想ばね定数の値および支持条件の影響を詳細に調べた. 数値解に影響を与えない範囲の無次元仮想ばね定数の最大値は, 前報と同様の鉛直ばねおよび回転ばね共に 10^{10} であった. この値を用いて, spline次数を5次に設定したときの座屈荷重は, 支持条件にかかわらずノットの数が増大にともなって有効桁数八桁から九桁で収束した. また, 片持長柱の座屈荷重は有効桁数八桁から九桁まで厳密解に一致し, これ以外の支持条件については先行研究よりも精度の高い上界と思われる値を示した.

キーワード: Ritz法, 正規化されたB-spline基底関数, 仮想ばね法,
線形座屈問題, 軸方向分布力, 線形化された梁-柱理論

1. 緒 言

第一報¹⁾では, 線形化された梁-柱理論²⁾に従う中心軸圧縮力を受ける均質かつ真つすぐな長柱 (以下, 長柱と略す) の線形座屈問題を仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法 (以下, 本手法と略す) により解析し, 座屈荷重の精度, 離散化条件, 仮想ばね定数の値および支持条件の関係を詳細に調べた. 調査の結果, 支持条件とspline次数にかかわらず, ノットを増大にともなって数値的に安定した近似解を与える仮想ばね定数の最大値は, 鉛直ばねと回転ばね共に 10^{10} であった. また, 関数空間に5次の正規化されたB-spline基底関数 (以下, B-spline基底関数と略す) を張ったときの本手法の座屈荷重はノットの数が増大にともなって上から厳密解に近づき, 収束値は有効桁数八桁から九桁まで厳密解に一致するという高い精度を示した. この問題の強形式は, 定数係数の四階線型の斉次常微分方程式の境界値問題で表されるので, 閉じた形の厳密解を求めることができ, その数量化は比較的容易である.

これに対して, 構造物の合理的な設計や材料の不均質性の活用の見地から用いられる変断面長柱³⁾や軸方向傾斜機能材料(Axially Functionally Graded Materials: AFGMs)⁴⁾の線形座屈問題は, 線形化された梁-柱理論²⁾に基づくとすれ

ばその強形式は変数係数の四階線型の斉次常微分方程式の境界値問題で表される. これは, 柱の断面諸量や材料特性が部材軸方向に変化することによる. 文献5)には, 幾つかの変断面長柱と軸方向に不均質な長柱の線形座屈問題の厳密解が纏められている. これは第一種および第二種Bessel関数により表現されるため, その数量化は容易でなく, ある程度の専門知識を必要とする. また, 構造設計や材料設計の観点に立てば, 柱の軸方向に任意に変化する断面諸量や材料特性の取り扱いが求められる. こうなると, 厳密解を求めることはほぼ不可能になり, 何らかの手段により強形式を近似的に解かざるを得ない. 近似解には, 対象としている工学的諸問題を解決できるだけの精度が要求されることは言うまでもない. 他方で, 渡辺⁶⁾が述べているように, 何らかの手法により数値的に安定して高精度な近似解が得られるようになれば, それは厳密解や級数解に代わって有限要素の性能評価や各種近似解析手法が強形式を正しく解いているかの検証へ活用できるであろう.

このような背景の下, 本稿では変数係数の四階線型の斉次常微分方程式の斉次境界値問題で記述される“自重による均質かつ真つすぐな長柱の線形座屈問題”を対象として, 第一報¹⁾と同様の調査を実施し, ある程度の有益な情報を得ることができたので報告する.

2. 数学モデル (強形式)

(1) 座標系と仮定

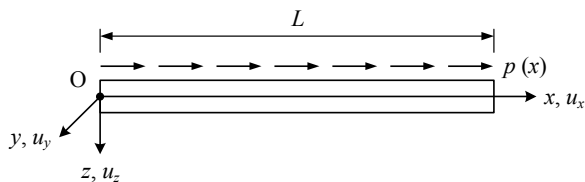


図-1 直線直交座標系O-xyzと長柱

図-1に示すような右手直交直線座標系O-xyzにある長柱の単位長さ当たりの軸方向分布力 $p(x)$ の作用による分岐座屈問題を考える. ここで, x 軸, y 軸, および z 軸の設定は前報¹⁾と同様であり, $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ は, それぞれ, 長柱の x , y , z 方向の変位である. 柱の長さ L は yz 断面の寸法に比べて卓越しているとし, yz 断面の断面積を A , 中立軸に関する断面二次モーメントを I で表す (正しくは I_y である). 長柱は x 軸方向に一様断面とし, かつ同方向に均質な材料からなるとする.

本稿では, 軸方向分布力 $p(x)$ が作用することにより長柱が僅かに y 軸まわりに曲げ変形を生じてつり合った状態を考える. この不安定現象の数学モデルには, 線形化された梁-柱理論²⁾を用いる. この理論に設けられる仮定, およびその仮定に基づく変位場とひずみ場についても前報¹⁾を参照されたい.

(2) 一般化応力の平衡方程式と境界条件式

単位長さ当たりの軸方向分布力 $p(x)$ を受ける長柱が僅かに曲げ変形を生じてつり合ったとき, 長柱のある点の近傍における局所的な力のつり合いを考える.

領域 $\Omega = (0, L)$ にある長柱の任意の点の近傍の微小な線分要素における x 軸方向と z 軸方向の力のつり合い条件式, および xz 平面内の任意の点に関する力のモーメントのつり合い条件式は, それぞれ, 次のように表される.

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ S(x) + N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right\} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} - S(x) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1c)$$

ここで, $N(x)$ は僅かに曲がった長柱の断面の法線方向に生じる軸力, $S(x)$ は同断面の接線方向に生じるせん断力であり, $M(x)$ は y 軸まわりの曲げモーメントである (正しくは M_y である). これらは, yz 断面に分布する垂直応力とせん断

応力を軸線に関する一般化応力 (断面力) として表したものである. 式(1b)の下線部は, 軸力 $N(x)$ が影響する非線形項であることを意味している. この項を無視すると, 式(1b)は初等梁理論の z 軸方向の力のつり合い条件式に一致する.

長柱の左端点($x = 0$)と右端点($x = L$)での境界条件式は, 次のような組み合わせにより表される.

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad \text{or} \quad n_x N = \bar{N} \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (2a)$$

$$w = \bar{w} \quad \text{on } \Gamma_w \quad \text{or} \quad n_x Q = \bar{Q} \quad \text{on } \Gamma_Q, \quad (2b)$$

$$\theta = \bar{\theta} \quad \text{on } \Gamma_\theta \quad \text{or} \quad n_x M = \bar{M} \quad \text{on } \Gamma_M. \quad (2c)$$

ここで, $\Gamma = \{0, L\}$ は一次元領域の境界を表しており, 下付き文字の u, w, θ は変位の境界条件を, N, Q, M は一般化応力の境界条件を意味している. n_x は線部材の境界に立てた外向き法線方向余弦の x 方向の成分であり, 左端点($x = 0$)の境界で $n_x = -1$, 右端点($x = L$)の境界で $n_x = +1$ を取る. θ は曲げたわみ曲線 w の接線と軸線とがなす角を表したわみ角であり, これは微小角 ($|\theta| \ll 1$) であるとすれば, 次のように表すことができる.

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (3)$$

また, Q は z 軸に平行なせん断力であり, 次のように表される.

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} + N(x) \frac{dw(x)}{dx}. \quad (4)$$

これは, 式(1b)の $\{ \}$ の中の式に相当する. 僅かに曲がった長柱の断面の接線方向に生じるせん断力 $S(x)$ とは異なることに注意する. なお, 各条件式の右辺のバーを付した変位成分 u, w , たわみ角 θ および一般化応力 N, Q, M は, 与える既知の値であることを意味している.

長柱の支持条件の数学モデルは, これらの境界条件式を組み合わせ, 次のように理想化される.

ピン支点 (ヒンジ支点):

$$w = 0 \quad \text{on } \Gamma_w, \quad M = 0 \quad \text{on } \Gamma_M. \quad (5)$$

固定端:

$$w = 0 \quad \text{on } \Gamma_w, \quad \theta = 0 \quad \text{on } \Gamma_\theta. \quad (6)$$

自由端:

$$M = 0 \quad \text{on } \Gamma_M, \quad Q = 0 \quad \text{on } \Gamma_Q. \quad (7)$$

これらは, 斉次の境界条件式である.

(3) 一般化応力と変位で表された構成方程式

長柱に対して, 本稿のように右手直交直線座標系O-xyzを設定すると, yz 断面に設定した図心軸まわりの断面一次モーメントは零になる. このことから, 一般化応力と変位

で表された構成方程式に含まれる軸方向変位 $u(x)$ と面外変位 $w(x)$ に関する項は非連成化され、微小ひずみ・微小回転の有限変位に基づく梁-柱理論の構成方程式は、次のように表される。

$$N(x) = EA \left\{ \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dw(x)}{dx} \right]^2 \right\}, \quad (8a)$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3w(x)}{dx^3} + N(x) \frac{dw(x)}{dx}, \quad (8b)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (8c)$$

ここで、 EA は伸び剛性、 EI は曲げ剛性であり、 E は縦弾性係数である。なお、式(8a)の下線を付した右辺の第二項を無視したものが、線形化された梁-柱理論の構成則になる。

(4) 支配方程式と境界条件による強形式

式(1c)を式(1b)に代入し、更に一般化応力と変位で表された構成方程式の式(8c)を代入すれば、変位で表された平衡方程式である長柱の線形座屈問題の支配方程式(基礎方程式)が次のように得られる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[-EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right] = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (9)$$

さて、 x 軸方向のつり合いの微分方程式(1a)は、線部材の単純引張理論の軸力 $N(x)$ に関する平衡方程式を表しており、曲げとは非連成である。よって、境界条件式(2a)が与えられれば、 $N(x)$ の厳密解は容易に求められる。長柱の自重を単位長さあたりに作用する軸方向の分布力 $p(x)$ で表すと、 $p(x) = p_0$ である。ただし、 $p_0 = \rho g A$ は分布力の荷重強度、 ρ は密度であり、 g は重力加速度である。これを式(1a)に代入し、長柱の右端点($x=L$)で自由端の条件($N=0$ on Γ_N)の下で解けば、自重の作用により生じる長柱の軸力 $N(x)$ が次のように求められる。

$$N(x) = -p_0(L-x) \quad (0 \leq x \leq L). \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入すれば、自重の作用を受ける均質かつ等断面長柱の線形座屈問題の支配方程式は、次のように表される。

$$-EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left\{ p_0(L-x) \frac{dw(x)}{dx} \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (11)$$

境界条件式を面外変位 w で表すと、
ピン支点 (ヒンジ支点) :

$$w=0 \quad \text{on } \Gamma_w, \quad -EI \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad \text{on } \Gamma_M. \quad (12)$$

固定端 :

$$w=0 \quad \text{on } \Gamma_w, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{on } \Gamma_\theta. \quad (13)$$

自由端 :

$$-EI \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad \text{on } \Gamma_M, \quad (14)$$

$$-EI \frac{d^3w}{dx^3} - p_0(L-x) \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{on } \Gamma_Q.$$

本問題は、変数係数の四階線型の斉次常微分方程式の斉次境界値問題の自明でない解を求める固有値問題である。求められる固有値が座屈荷重 q_{cr} であり、これに対応する固有関数 w が座屈したときの曲げ変形を表す。

3. 強形式に等価な汎関数の停留値問題

仮想ばね法により基本境界条件を緩和させた変分原理の汎関数(全ポテンシャルエネルギー) Π は、次のように表される。

$$\Pi = U + V + \frac{\alpha_{w0}}{2} (w - \bar{w}_0)^2 \Big|_{x=0} + \frac{\alpha_{wL}}{2} (w - \bar{w}_L)^2 \Big|_{x=L} + \frac{\beta_{\theta 0}}{2} (\theta - \bar{\theta}_0)^2 \Big|_{x=0} + \frac{\beta_{\theta L}}{2} (\theta - \bar{\theta}_L)^2 \Big|_{x=L}. \quad (15)$$

ここで、 U は長柱に蓄積されるひずみエネルギー、 V は軸方向の等分布力(自重) $p(x) = p_0$ による外力ポテンシャルであり、それぞれ、式(16)と式(17)によって与えられる。

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (16)$$

$$V = -\frac{p_0}{2} \int_0^L (L-x) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (17)$$

また、 α_{w0}, α_{wL} は、それぞれ、長柱の左端点($x=0$)と右端点($x=L$)の面外変位 w に抵抗する仮想の鉛直ばね定数、 $\beta_{\theta 0}, \beta_{\theta L}$ は、それぞれ、長柱の左端点($x=0$)と右端点($x=L$)のたわみ角 θ に抵抗する仮想の回転ばね定数、式中の右辺のバーを付した面外変位 w とたわみ角 θ は境界での既知の値であり、その下付き文字の0と L は、それぞれ、 $x=0, x=L$ での条件であることを意味する。

式(12)と式(13)の基本境界条件は斉次であるので、本稿で考えるべき汎関数は、次のように表される。

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{p_0}{2} \int_0^L (L-x) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{\alpha_{w0}}{2} w^2 \Big|_{x=0} + \frac{\alpha_{wL}}{2} w^2 \Big|_{x=L} + \frac{\beta_{\theta 0}}{2} \theta^2 \Big|_{x=0} + \frac{\beta_{\theta L}}{2} \theta^2 \Big|_{x=L}. \quad (18)$$

この汎関数 Π が停留するような微分可能、かつ連続な関数 w を見出せば、それは強形式の弱解を得ることに等しい。

4. 仮想ばね法により基本境界条件を緩和させた B-spline Ritz法による離散化された座屈方程式と座屈条件式の定式化

式(18)の汎関数 Π の要請をすべて満足する微分可能、かつ連続な変関数(長柱の面外変位) $w(x)$ を見出すことは困難を極める。よって、変関数 w を次のような有限自由度の試行関数で近似し、汎関数 Π が停留するような近似解を探索する。

$$w(x) \cong \sum_{i=1}^{n_{CP}} A_i N_{i,p}(x), \quad (19)$$

$$= \mathbf{N}_{i,p} \mathbf{A}$$

ここで、

$$\mathbf{N}_{i,p} = [N_{1,p}(x), N_{2,p}(x), \dots, N_{n_{CP}-1,p}(x), N_{n_{CP},p}(x)], \quad (20)$$

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{n_{CP}-1}, A_{n_{CP}}\}^T, \quad (21)$$

であり、 T は転置を意味する。 $N_{i,p}(x)$ は次数 p のB-spline基底関数、 i は基底関数の番号、 A_i は i 番目の基底の重み係数であり、 n_{CP} は基底関数の数である。領域 Ω に1の分割(partition of unity)を満たすB-spline基底を張るために必要なノットの数 m は、 $(m+2p)$ 個である。ただし、 m は領域 Ω 内(境界 Γ を含む)に設定するノットの数であり、 $2p$ は領域 Ω の外側(境界 Γ を含まない)に設ける付加ノットの数である。基底関数の数 n_{CP} と境界 Γ を含む領域 Ω 内に設定するノットの数 m との間には、次の関係が成立する。

$$n_{CP} = m + p - 1. \quad (22)$$

式(19)を式(18)の汎関数 Π に代入すると、 Π は有限の自由度で近似される。この近似された汎関数 Π の停留条件：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_{CP} - 1, n_{CP}), \quad (23)$$

より、次の離散化された座屈方程式を得る。

$$[(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p) - p_0 \mathbf{K}_G] \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

ここで、

$$\mathbf{K}_0 = EI \int_0^L \frac{d^2 \mathbf{N}_{i,p}^T}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_{j,p}}{dx^2} dx, \quad (25)$$

は自由境界を有する長柱の剛性行列、

$$\mathbf{K}_p = \alpha_{w0} \mathbf{N}_{i,p}^T \mathbf{N}_{j,p} \Big|_{x=0} + \alpha_{wL} \mathbf{N}_{i,p}^T \mathbf{N}_{j,p} \Big|_{x=L} + \beta_{\theta 0} \frac{d\mathbf{N}_{i,p}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{j,p}}{dx} \Big|_{x=0} + \beta_{\theta L} \frac{d\mathbf{N}_{i,p}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{j,p}}{dx} \Big|_{x=L}, \quad (26)$$

は基本境界条件を緩和するための仮想ばねの剛性行列であり、 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p$ は長柱の剛性行列である。また、

$$\mathbf{K}_G = p_0 \int_0^L (L-x) \frac{d\mathbf{N}_{i,p}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{j,p}}{dx} dx, \quad (27)$$

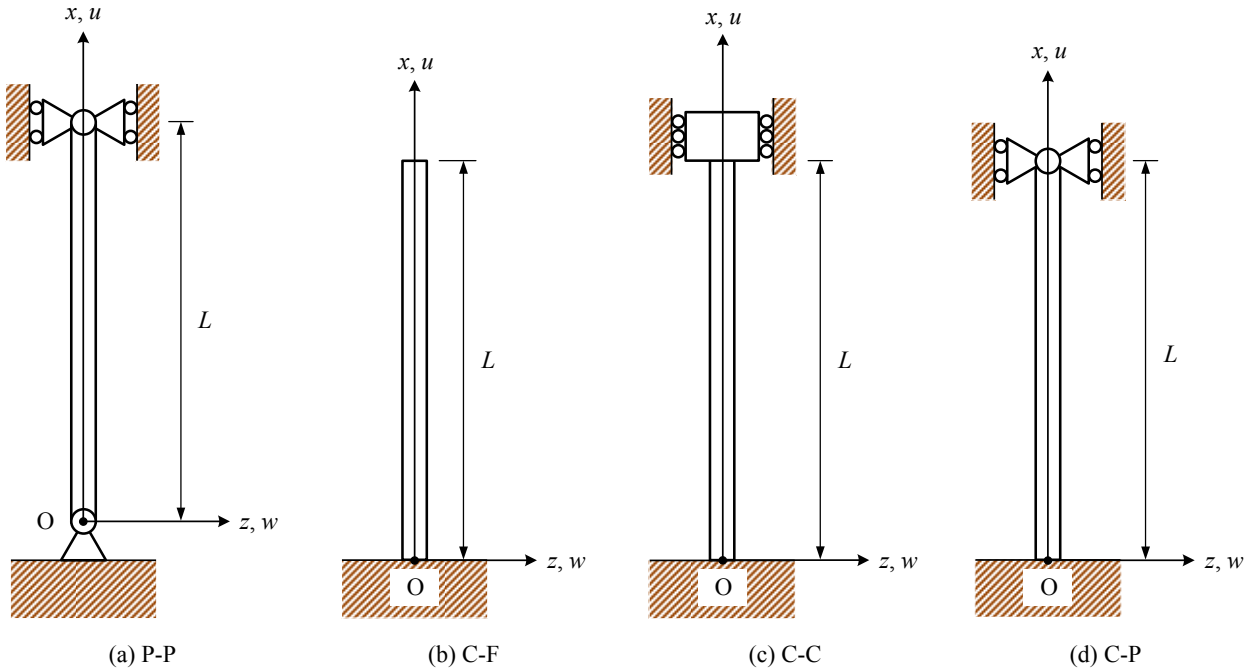


図-2 数値実験に用いる長柱の支持条件

は長柱の幾何剛性行列であり、 $\mathbf{0}$ は零の列ベクトルである。剛性行列 $\mathbf{K}_0$ と幾何剛性行列 $\mathbf{K}_G$ は、 $(p+1)$ 点のGauss-Legendreの数値積分により求めた。

式(24)の自明でない解は、次式の座屈条件式：

$$\det[(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p) - p_0 \mathbf{K}_G] = \mathbf{0}, \quad (28)$$

から固有値 p_0 を求め、それを式(24)に代入して固有値 p_0 に対応する固有ベクトル $\mathbf{A}$ を決定することで得られる。

5. 数値実験および考察

ここでは、軸方向等分布力 $p(x) (= p_0)$ が作用する均質かつ等断面長柱の線形座屈問題を本手法により解析し、座屈荷重 p_{cr} に与えるspline次数 p 、境界を含む領域内に設定するノットの数（以下、ノットの数と略す） m 、仮想ばね定数の値および長柱の支持条件の影響を詳細に調べる。

本稿では長柱の座屈荷重 p_{cr} 、仮想の鉛直ばね定数 α_{w0} 、 α_{wL} および仮想の回転ばね定数 $\beta_{\theta 0}$ 、 $\beta_{\theta L}$ を、次のように無次元化して表している。

$$p^* = \frac{p_{cr} L^3}{EI}. \quad (29)$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha_{w0} L^3}{EI} = \frac{\alpha_{wL} L^3}{EI}, \quad (30)$$

$$\beta^* = \frac{\beta_{\theta 0} L}{EI} = \frac{\beta_{\theta L} L}{EI}. \quad (31)$$

また、前報の知見¹⁾を参考にして、数値実験に用いる無次元仮想ばね定数 κ^* を次のように定義した。

$$\kappa^* = \alpha^* = \beta^*. \quad (32)$$

数値実験に設定する支持条件は、図-2に示す四ケースとし、例えばC-Fのように表す。これは柱の下端($x=0$)で固定Cであり、上端($x=L$)で自由Fであることを意味する。また、ピン支点（ヒンジ支点）はPで表す。なお、(a)と(c)は対称の支持条件、(b)と(d)は非対称の境界条件であり、(a)と(b)は静定、(c)と(d)は不静定である。

通常、工学分野の諸問題の解決を目的とするならば、強形式の近似解は有効桁数三桁から四桁程度の精度があれば十分であるが、本稿は前報と同様の観点¹⁾の下、無次元座屈荷重 p^* を有効桁数十桁程度で整理した。なお、数値計算には64 bit OSのpersonal computerを用い、Fortranの倍精度で計算した。

(1) Timoshenkoのエネルギー法に基づく座屈荷重の評価

Timoshenkoのエネルギー法によれば、軸方向等分布力 $p(x) (= p_0)$ の作用による均質かつ等断面長柱の座屈荷重 p_{cr} は、次

式によって求めることができる⁷⁾。

$$p_{cr} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{p_0}{2} \int_0^L (L-x) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}. \quad (33)$$

ここで、分子は座屈による曲げ変形によって長柱に貯えられるひずみエネルギー（内力仕事）であり、分母は長柱の曲げ座屈変形により生じる軸圧縮変位と軸方向等分布力とがなす外力仕事を意味する。式(33)の右辺の表示は、線形化された梁一柱理論に基づく長柱の線形座屈問題におけるRayleigh商である⁷⁾。これより、座屈荷重 p_{cr} は、外力仕事に対するひずみエネルギーの大きさとして評価されると解釈することができよう。なお、許容である試行関数を仮定したRitz法による近似解は、厳密解の上界を与える^{8),9)}ので、次の関係が成り立つ。

$$p_{cr} \geq p_{cr}^{\text{Exact}}. \quad (34)$$

ここで、不等式の左辺はRitz法による近似解であり、右辺は厳密解を意味する。ただし、前報¹⁾によれば、関数空間に高次のB-spline基底を張ったとき、本手法の座屈荷重はノットの増大にともなって有効桁数九桁の収束値を得るが、数値計算上の誤差と思われる原因により、その値は厳密解の下界を与えることがある。

さて、前報¹⁾では、四つの支持条件について全て閉じた形式の厳密解を求めることが可能なため、本手法の近似解の上界と下界を明確にすることができた。本稿が対象としている問題についても厳密解は示されているが、前報のように閉じた形式で与えられるのはC-F（片持）の支持条件に限定されているようであり^{5),10)}、その他の支持条件については境界条件を満足すべき級数解の形式（以下、べき級数解と略す）で与えられている¹¹⁾⁻¹³⁾。そのため、上界と下界の明確な区別が難しい。そこで、本稿では、次の手順により、本手法の近似解に影響を与えない範囲の最大の無次元仮想ばね定数 κ^* の値と、これを設定したときの本手法の近似解の精度を調べることにした。

- [1] 厳密解が得られるC-F（片持）について前報と同様の調査を行い、結果を整理する。
- [2] 残り三ケースの支持条件については、前報と[1]の本手法の近似解の収束性と計算精度を判断材料とし、Huang・Dareing¹¹⁾のべき級数解と杉山ら¹²⁾のべき級数解の収束性と有効桁数六桁の収束値と比較することで、本手法の近似解の収束性と精度を考察する。

なお、Huang・Dareing¹¹⁾と杉山ら¹²⁾は、自重を受ける長柱の支配方程式の面外変位を式(35)のようなべき級数で近似し、支配方程式と境界条件から未定係数 b_n に関する連立方程式を導出している。これを数値的に解くことで、座屈荷重と、これに対応する座屈モードの数値を得ている。

表-1 自重の作用による長柱の無次元座屈荷重 p^* に与えるspline次数 p 、ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: C-F

p	κ^*	m	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
4	10^8	11	7.83734735	55.9771972	148.517011	285.588375
		21	7.83734721	55.9770304	148.508401	285.451764
		31	7.83734720	55.9770282	148.508302	285.450336
		41	7.83734720	55.9770280	148.508295	285.450236
		51	7.83734720	55.9770280	148.508294	285.450221
		61	7.83734720	55.9770280	148.508294	285.450217
	10^{10}	11	7.83734756	55.9771987	148.517015	285.588383
		21	7.83734744	55.9770320	148.508406	285.451772
		31	7.83734744	55.9770299	148.508307	285.450344
		41	7.83734744	55.9770297	148.508299	285.450244
		51	7.83734744	55.9770297	148.508298	285.450229
		61	7.83734743	55.9770297	148.508298	285.450226
	10^{12}	11	7.83734834	55.9772044	148.517031	285.588418
		21	7.83734706	55.9770293	148.508398	285.451758
		31	7.83734747	55.9770301	148.508307	285.450346
		41	7.83734723	55.9770282	148.508296	285.450237
		51	7.83734749	55.9770301	148.508299	285.450231
		61	7.83734741	55.9770295	148.508298	285.450225
5	10^8	11	7.83734720	55.9770297	148.508592	285.463595
		21	7.83734720	55.9770280	148.508294	285.450238
		31	7.83734720	55.9770280	148.508294	285.450216
		41	7.83734720	55.9770280	148.508294	285.450216
		51	7.83734720	55.9770280	148.508294	285.450215
		61	7.83734721	55.9770280	148.508294	285.450215
	10^{10}	11	7.83734747	55.9770317	148.508597	285.463604
		21	7.83734744	55.9770297	148.508299	285.450247
		31	7.83734743	55.9770296	148.508298	285.450225
		41	7.83734744	55.9770297	148.508298	285.450224
		51	7.83734743	55.9770297	148.508298	285.450224
		61	7.83734744	55.9770297	148.508298	285.450224
	10^{12}	11	7.83734943	55.9770458	148.508634	285.463663
		21	7.83734782	55.9770325	148.508307	285.450264
		31	7.83734737	55.9770292	148.508297	285.450222
		41	7.83734742	55.9770296	148.508298	285.450224
		51	7.83734731	55.9770288	148.508296	285.450219
		61	7.83734745	55.9770297	148.508298	285.450224
Exact⁵⁾			7.83734744	55.9770297	148.508298	285.450224
Huang and Dareing (1969) ¹¹⁾			7.8373	55.977	148.51	
Sugiyama et al. (1977) ¹²⁾			7.83735	55.9770		
The structural mechanics handbook (1986) ¹⁵⁾			7.8373			
Wang and Ang (1988) ¹⁴⁾			7.84			
Duan and Wang (2008) ¹³⁾			7.8373			

Note: 杉山ら¹²⁾のMode 1の p^* は下から収束し, $N=24$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている. Mode 2は上から収束し, $N=36$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている.

$$w(\xi) = \sum_{n=0}^N b_n \xi^n. \quad (35)$$

ここで、 ξ は無次元座標の変数であるが、その定義は文献11)と文献12)で異なることに注意されたい。Huang・Dareing¹¹⁾が示した数値は、近似項数 N に対する座屈荷重の収束性が不明であるが、一次から三次までの座屈荷重を有効桁数五桁で与えてくれている。杉山ら¹²⁾は、近似項数 N に対する一次と二次の座屈荷重の変化の情報を有効桁数六桁で提供してくれている。この他にもDuan・Wang¹³⁾の変数 $r^{n/3}$ ($n = 0, 1, 2, 3$)と一般化された超幾何関数 $F(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; r)$ との積を基底とした境界条件を満足する厳密解(厳密解は四つの項で表され、一般化された超幾何関数の定義には無限級数が含まれる)も提案されているが、文献11)と文献12)よりも数値解に関する情報が少ない。

(2) 片持(C-F)長柱

表-1は、支持条件がC-Fである自重の作用による長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 p^* に与えるspline次数 p 、ノット数 m と無次元仮想ばね定数 κ^* の影響を表形式で整理したものである。分岐座屈荷重に相当するのは最低次の座屈荷重であるが、二次以上の座屈荷重とこれに対応する座屈モードは、座屈荷重を高めるための重要な情報を提供してくれる¹⁾ことから、本稿でも一次から四次までの座屈荷重について検討した。無次元仮想ばね定数 κ^* は、 $10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}$ の五ケースについて検討したが、本稿では $10^8, 10^{10}, 10^{12}$ の結果を提供する。B-spline基底関数の次数 p は、前報と同様の理由により、 $p=4, 5$ に設定した¹⁾。Spline次数 $p=4$ のとき、面外変位 w は三階導関数まで連続になるので、せん断力 $Q(x)$ は一次の区分的多項式で近似される。当然のことではあるが、spline次数 $p=5$ に設定すると、面外変位 w は四階導関数まで連続であるので、せん断力 $Q(x)$ の近似式は二次の区分的多項式になる。ノットの数 m は、11から61まで変化させ、有効桁数九桁で表した無次元座屈荷重 p^* の値の変化を調べた。なお、表のboldの数値は近似解が収束し、かつ厳密解と一致したことを意味する。また、近似解は収束したが、その収束値が厳密解と一致しないものには、boldの数値に下線を付した。先にも述べたとおり、ここでは厳密解と比較することで、近似解に影響を与えない無次元仮想ばね定数 κ^* の最大の値の候補と、その精度を検証する。表には厳密解の数値が記載されていれば十分であるが、参考までにHuang・Dareing¹¹⁾と杉山ら¹²⁾のべき級数解、Duan・Wang¹³⁾の厳密解、Wang・Ang¹⁴⁾のRitz法による近似解、および構造力学公式集¹⁵⁾の数値も併記した。

厳密解の数値は、文献5)と文献10)を参考にして数値的に求めた。ここで、自重を受ける片持長柱の座屈方程式は、次式で与えられる^{5), 10)}。

$$J_{-1/3}(z) = 0. \quad (36)$$

ただし、

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q_{cr} L^3}{EI}}, \quad (37)$$

である。ここで、 $J_{-1/3}(z)$ は $(-1/3)$ 次の第一種Bessel関数である。この方程式を解析的に解くことは困難であるため、これを有効桁数十五桁の精度で数値的に解くこととし、次の四つの零根を得た。

$$\begin{aligned} z_1 &= 1.86635085887389, \\ z_2 &= 4.98785323143515, \\ z_3 &= 8.12426538193969, \\ z_4 &= 11.2635148254276. \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、 z の下付添字は、座屈モードの次数を意味する。式(38)を式(37)に代入すれば、一次から四次までの無次元座屈荷重 p^* の厳密解の数値を求めることができる。

表-1より、spline次数 p にかかわらず、近似解に影響を与えない最も大きな無次元仮想ばね定数 κ^* の値は、前報¹⁾と同様に 10^{10} である。 $\kappa^* = 10^8$ の近似解は柔らかく、 $\kappa^* = 10^{12}$ のそれは数値的に安定していない。Spline次数 $p=5$ に設定すると、一次の無次元座屈荷重 p^* は有効桁数八桁で、二次から四次までのそれは有効桁数九桁での収束値を得ている。ただし、二次の無次元座屈荷重 p^* は、ノットの数 m を21から41に変化させる過程で数値が振動しており、かつ $m=31$ のときに下界である。上界定理から判断すると、九桁目の数値の信頼性は低いと考えられる。なお、一次と二次の無次元座屈荷重 p^* は厳密解と有効桁数八桁まで一致しており、三次と四次のそれは有効桁数九桁まで一致する。前報¹⁾と比較すると、一次と二次の座屈荷重の精度が若干低下している。これは、長柱が自重によって座屈するときの曲げ変形の形が前報よりも複雑になっているためであると考えられる。

(3) 支持条件がP-P, C-CおよびC-Pである長柱

表-2から表-4は、それぞれ、支持条件をP-P, C-C, C-Pとして表-1と同様の検討を行ったものである。ただし、本節では厳密解を有効桁数九桁程度で数値化したものがないため、上界と下界を明確に区別することができず、また、近似解の収束値が何に収束したのかを正確に判断することが難しい。よって、ここでは近似解が有効桁数九桁で収束した数値をboldで表すこととし、Huang・Dareing¹¹⁾の一次から三次までの座屈荷重のべき級数解、および杉山ら¹²⁾のべき級数解の収束状態とその収束値と比較することで、本手法の近似解の精度を判断する。

表-2より、spline次数 p にかかわらず、近似解に影響を与えない範囲の無次元仮想ばね定数 κ^* の最大値は 10^{10} である。また、spline次数 $p=5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^* = 10^{10}$ に設定したときの本手法の近似解は、ノットの数 m の増大にともない数値的に安定した収束状態を示しており、有効桁数

表-2 自重の作用による長柱の無次元座屈荷重 p^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: P-P

p	α^*	m	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	
4	10^8	11	18.5687256	86.4315979	196.318759	353.186380	
		21	18.5687239	86.4308408	196.291038	352.751647	
		31	18.5687239	86.4308316	196.290779	352.748588	
		41	18.5687239	86.4308309	196.290760	352.748378	
		51	18.5687239	86.4308308	196.290757	352.748346	
		61	18.5687239	86.4308308	196.290757	352.748339	
	10^{10}	11	18.5687266	86.4316031	196.318775	353.186414	
		21	18.5687249	86.4308460	196.291055	352.751680	
		31	18.5687248	86.4308368	196.290796	352.748622	
		41	18.5687248	86.4308361	196.290777	352.748412	
		51	18.5687248	86.4308360	196.290774	352.748380	
		61	18.5687248	86.4308359	196.290773	352.748372	
	10^{12}	11	18.5687259	86.4316024	196.318774	353.186413	
		21	18.5687247	86.4308460	196.291055	352.751680	
		31	18.5687248	86.4308368	196.290796	352.748622	
		41	18.5687248	86.4308361	196.290777	352.748412	
		51	18.5687248	86.4308360	196.290774	352.748380	
		61	18.5687248	86.4308360	196.290773	352.748373	
	5	10^8	11	18.5687239	86.4308564	196.292612	352.791084
			21	18.5687239	86.4308308	196.290761	352.748427
			31	18.5687239	86.4308308	196.290756	352.748338
			41	18.5687239	86.4308308	196.290756	352.748335
			51	18.5687239	86.4308307	196.290756	352.748335
			61	18.5687239	86.4308308	196.290756	352.748335
10^{10}		11	18.5687248	86.4308615	196.292629	352.791118	
		21	18.5687248	86.4308360	196.290777	352.748460	
		31	18.5687248	86.4308359	196.290773	352.748371	
		41	18.5687248	86.4308359	196.290773	352.748369	
		51	18.5687248	86.4308359	196.290773	352.748369	
		61	18.5687248	86.4308359	196.290773	352.748369	
10^{12}		11	18.5687245	86.4308614	196.292629	352.791118	
		21	18.5687250	86.4308362	196.290777	352.748461	
		31	18.5687248	86.4308360	196.290773	352.748372	
		41	18.5687248	86.4308360	196.290773	352.748369	
		51	18.5687249	86.4308360	196.290773	352.748369	
		61	18.5687248	86.4308360	196.290773	352.748369	
Huang and Dareing (1969) ¹¹⁾			18.569	86.431	196.29		
Sugiyama et al. (1977) ¹²⁾			18.5687	86.4309			
The structural mechanics handbook (1986) ¹⁵⁾			18.569				
Wang and Ang (1988) ¹⁴⁾			18.58				
Duan and Wang (2008) ¹³⁾			18.5687				

Note: 杉山ら¹²⁾のMode 1の p^* は上から収束し, $N = 30$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている. Mode 2は下から収束し, $N = 42$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている.

表-3 自重の作用による長柱の無次元座屈荷重 p^* に与えるspline次数 p , ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: C-C

p	κ^*	m	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
4	10^8	11	74.6290737	157.044090	325.758330	495.467677
		21	74.6285668	157.032875	325.516057	494.004251
		31	74.6285605	157.032742	325.513599	493.989459
		41	74.6285601	157.032732	325.513431	493.988483
		51	74.6285600	157.032731	325.513405	493.988339
		61	74.6285600	157.032731	325.513400	493.988306
	10^{10}	11	74.6290822	157.044139	325.758384	495.467860
		21	74.6285755	157.032924	325.516112	494.004432
		31	74.6285692	157.032792	325.513654	493.989639
		41	74.6285687	157.032782	325.513486	493.988663
		51	74.6285687	157.032780	325.513460	493.988519
		61	74.6285686	157.032780	325.513454	493.988487
	10^{12}	11	74.6290932	157.044167	325.758436	495.468037
		21	74.6285710	157.032915	325.516094	494.004406
		31	74.6285705	157.032794	325.513659	493.989647
		41	74.6285668	157.032778	325.513478	493.988652
		51	74.6285694	157.032782	325.513463	493.988525
		61	74.6285684	157.032780	325.513454	493.988486
5	10^8	11	74.6285675	157.033185	325.542366	494.427873
		21	74.6285600	157.032731	325.513442	493.988741
		31	74.6285600	157.032730	325.513398	493.988303
		41	74.6285600	157.032730	325.513397	493.988291
		51	74.6285600	157.032730	325.513397	493.988290
		61	74.6285600	157.032730	325.513397	493.988290
	10^{10}	11	74.6285766	157.033235	325.542422	494.428056
		21	74.6285687	157.032781	325.513498	493.988923
		31	74.6285686	157.032780	325.513453	493.988483
		41	74.6285686	157.032780	325.513452	493.988472
		51	74.6285686	157.032780	325.513452	493.988471
		61	74.6285686	157.032780	325.513452	493.988471
	10^{12}	11	74.6286030	157.033287	325.542508	494.428094
		21	74.6285738	157.032792	325.513522	493.988964
		31	74.6285671	157.032777	325.513447	493.988475
		41	74.6285683	157.032779	325.513451	493.988471
		51	74.6285673	157.032777	325.513446	493.988463
		61	74.6285688	157.032780	325.513453	493.988473
Huang and Dareing (1969) ¹¹⁾			74.629	157.03	325.51	
Sugiyama et al. (1977) ¹²⁾			74.6286	157.031		
The structural mechanics handbook (1986) ¹⁵⁾			74.629			
Wang and Ang (1988) ¹⁴⁾			78.96			
Duan and Wang (2008) ¹³⁾			74.6286			

Note: 杉山ら¹²⁾のMode 1の p^* は上から収束し, $N=36$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている. Mode 2は下から収束し, $N=42$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている.

表-4 自重の作用による長柱の無次元座屈荷重 p^* に与えるspline次数 p 、ノットの数 m と仮想ばね定数 κ^* の影響: C-P

p	κ^*	m	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
4	10^8	11	52.5007890	129.059252	276.364762	439.725890
		21	52.5006621	129.054333	276.245006	438.864630
		31	52.5006604	129.054274	276.243769	438.855769
		41	52.5006603	129.054270	276.243682	438.855176
		51	52.5006603	129.054269	276.243669	438.855088
		61	52.5006603	129.054269	276.243666	438.855068
	10^{10}	11	52.5007917	129.059270	276.364784	439.725970
		21	52.5006648	129.054352	276.245029	438.864709
		31	52.5006632	129.054293	276.243792	438.855848
		41	52.5006631	129.054288	276.243705	438.855255
		51	52.5006631	129.054288	276.243692	438.855167
		61	52.5006630	129.054287	276.243689	438.855147
	10^{12}	11	52.5007961	129.059284	276.364814	439.726070
		21	52.5006626	129.054346	276.245016	438.864690
		31	52.5006633	129.054293	276.243793	438.855851
		41	52.5006618	129.054285	276.243698	438.855245
		51	52.5006634	129.054289	276.243694	438.855171
		61	52.5006630	129.054287	276.243689	438.855147
5	10^8	11	52.5006615	129.054416	276.254325	439.061301
		21	52.5006603	129.054269	276.243684	438.855290
		31	52.5006603	129.054269	276.243665	438.855065
		41	52.5006603	129.054269	276.243665	438.855059
		51	52.5006603	129.054269	276.243665	438.855058
		61	52.5006603	129.054269	276.243665	438.855058
	10^{10}	11	52.5006645	129.054435	276.254349	439.061382
		21	52.5006631	129.054288	276.243707	438.855370
		31	52.5006630	129.054287	276.243688	438.855144
		41	52.5006630	129.054287	276.243688	438.855138
		51	52.5006630	129.054287	276.243688	438.855138
		61	52.5006630	129.054287	276.243688	438.855137
	10^{12}	11	52.5006776	129.054467	276.254408	439.061413
		21	52.5006656	129.054295	276.243723	438.855399
		31	52.5006627	129.054286	276.243686	438.855141
		41	52.5006630	129.054287	276.243687	438.855138
		51	52.5006622	129.054286	276.243683	438.855131
		61	52.5006631	129.054288	276.243688	438.855139
Huang and Dareing (1969) ¹¹⁾			52.501	129.05	276.24	
Sugiyama et al. (1977) ¹²⁾			52.5009	129.054		
The structural mechanics handbook (1986) ¹⁵⁾			52.501			
Wang and Ang (1988) ¹⁴⁾			53.91			
Duan and Wang (2008) ¹³⁾			52.5007			

Note: 杉山ら¹²⁾のMode 1の p^* は上から収束し、 $N=30$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている。Mode 2は下から収束し、 $N=42$ としたときに有効桁数六桁の収束値を得ている。

九桁での収束値を得る。また、その値は先行研究とよく一致している。前報¹⁾と本稿の片持長柱の数値実験結果から判断すると、本手法の近似解は、先行研究よりも精度の高い上界の値を与えていると考えられるが、二次の座屈荷重についてはもう少し詳細な検討が必要である。

表-3からは、次のことがわかる。

- Spline次数 p にかかわらず、数値的に安定し、近似解に影響を与えない最大の無次元仮想ばね定数 κ^* の値は、やはり 10^{10} である。
- C-FおよびP-Pの支持条件に比べると、近似解の収束性が良くない。これは、前報¹⁾と同様である。
- Spline次数 $p=5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^*=10^{10}$ に設定したときの本手法の近似解は、ノットの数 m の増大にともない数値的に安定した収束状態を示しており、有効桁数九桁での収束値を得る。その値は先行研究とよく一致している。
- P-Pの支持条件と同様、本手法の近似解は、先行研究よりも精度の高い上界の値を与えていると考えられるが、二次の座屈荷重については検討が必要である。

表-4についてもこれまでとほぼ同様の結果が得られている。異なるのは、次の二点であった。

- Spline次数 $p=5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^*=10^{10}$ に設定したときの本手法の一次から三次の無次元座屈荷重 p^* はノットの数 m の増大にともなって有効桁数九桁で収束するが、四次のそれは有効桁数八桁である。
- 本手法の近似解は、先行研究よりも精度の高い上界の値を与えていると考えられるが、一次の座屈荷重についてはもう少し詳細な検討が必要である。

6. 結 言

本稿では、線形化された梁-柱理論に従う自重の作用による均質かつ真つすぐな長柱の線形座屈問題を仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法により解析し、座屈荷重の精度、spline次数、解析領域内に配置するノットの数、仮想ばね定数の値および支持条件の関係を詳細に調べた。本調査から、次の知見が得られた。

- [1] 支持条件とspline次数 p にかかわらず、近似解に影響を与えない範囲の仮想ばね定数の最大値は、無次元仮想鉛直ばね定数 α^* 、無次元仮想回転ばね定数 β^* 共に 10^{10} である。
- [2] Spline次数 $p=5$ かつ無次元仮想ばね定数 $\kappa^*=10^{10}$ に設定したときの長柱の一次から四次までの無次元座屈荷重 p^* は、支持条件にかかわらず、ノットの数 m の増大にともなって上から正解に近づくような収束状態を示し、有効桁数八桁から九桁での収束値を得る。
- [3] [2]で得られた収束値は、有効桁数八桁から九桁の精度で、先行研究よりも精度の高い上界の値を与えて

いると考えられる。

なお、固有関数とその導関数の精度についても検討しているが、これについては別の機会に報告する予定である。

前報¹⁾と本稿の調査から汎関数の変関数をB-spline基底関数により近似するとき、仮想ばね法により基本境界条件を緩和させることによっても有効桁数八桁までは厳密解に一致する、または一致していると思われる高い解析精度が得られることを示した。今後は、基本境界条件を正確に満足する許容な試行関数を仮定したB-spline Ritz法により同様の調査を実施し、弱形式の近似解にB-spline基底関数を用いたときの基礎的な情報を提供したいと考えている。なお、本稿は同研究分野の専門家による査読を経ずに公開されるが、本稿で示した表の数値は、読者の判断で種々の離散化手法の検証などに使っていただければ幸いである。

謝辞：本研究の一部は、LIXIL住生活財団調査研究助成（2013年度）および前田記念工学振興財団研究助成（平成27年度）を受けて行われました。ここに記して謝意を示します。

参考文献

- 1) 名木野晴暢, 山本寧音, 足立忠晴: 仮想ばね法により基本境界条件を緩和させたB-spline Ritz法に設定する最適な仮想ばね定数の値について(その1) - 中心軸圧縮力を受ける均質な等断面長柱の線形座屈問題一, 大分工業高等専門学校紀要, 第56号, pp.24-37, 2019.
- 2) 土木学会構造工学委員会計算力学とその応用に関する研究小委員会: 構造工学における計算力学の基礎と応用(構造工学シリーズ7), 土木学会, pp.118-154, 1997.
- 3) 崎山毅, 栗林和夫: 変断面梁柱の挫屈解法について, 長崎大学工学部研究報告, 第8号, pp.25-31, 1977.
- 4) 山本寧音, 名木野晴暢, 足立忠晴, 樋口理宏: 軸方向傾斜機能材料からなる柱部材の線形座屈特性に与える縦弾性係数の変化の影響, 第5回九州橋梁・構造工学研究会シンポジウム論文集(USB), R4-1 (6 pages), 2017.
- 5) C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy: Exact solutions for buckling of structural members, CRC Press, pp.9-75 (chapter 2), 2004.
- 6) 渡辺力: p -Ritz法における試行関数の改良に関する一考察, 構造工学論文集A, 61A巻, pp.1-10, 2015.
- 7) 福本秀士: 構造物の座屈・安定解析(新体系土木工学9), 技報堂出版, pp.37-98, 1982.
- 8) T.R. トーカート(著). 岩本卓也(翻訳): 構造力学とエネルギー原理(理工学海外名著シリーズ32), プレイン図書出版, pp.76-77, 1979.
- 9) C.L.ディム, I.H.シャームス(共著), 砂川恵(監訳): 材料力学と変分法(理工学海外名著シリーズ26), プ

- レイン図書出版, pp.94-151, 1977.
- 10) S.P. Timoshenko and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability (Dover Civil and Mechanical Engineering), Dover Publications (2nd ed. edition), pp.100-113, 2009.
 - 11) T. Huang and D.W. Dareing: Buckling and Frequencies of Long Vertical Pipes, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 95(1), pp. 167-182, 1969.
 - 12) 杉山吉彦, 芦田幸逸, 川越治郎: 自重による長柱の座屈, 日本機械学会論文集, 43 巻, 376号, pp.4435-4443, 1977.
 - 13) W.H. Duan and C.M. Wang: Exact solution for buckling of columns including self-weight, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 134 (1), pp. 116-119, 2008.
 - 14) C.M. Wang and K.K. Ang: Buckling capacities of braced heavy columns under an axial load, Computers & Structures, Vol. 28 (5), pp.563-571, 1988.
 - 15) 土木学会構造工学委員会構造力学公式集改訂委員会編: 構造力学公式集 (昭和61年版), 土木学会, p.118, 1986.

(2019.9.30 受付)

編集委員

堀 栄 造（図書館長） 相本 正吾（図書館長補佐・一般科文系）
前 稔 文（教務主事補） 西村 俊二（学生主事補）
中野 壽彦（寮務主事補・機械工学科）
上野 崇寿（電気電子工学科） 渡辺 正浩（情報工学科）
名木野晴暢（都市・環境工学科） 福村 浩亨（一般科理系）

令和元年 11 月 15 日 発行

発 行 〒870-0152 大分県大分市大字牧 1666 番地

独立行政法人 国立高等専門学校機構

大 分 工 業 高 等 専 門 学 校

National Institute of Technology, Oita College

TEL (097) 552-6084 (ダイヤルイン)

FAX (097) 552-6786

本誌に記載の論文は発行者の承諾なくして他に記載することを禁ずる
